Grote Getallen

Daedalus Workshop 26 sept 2024

Oude Sterrewacht

Lambert Swaans

"Als er een groot getal bestaat zijn er maar weinig kleine getallen."

Wat komt er aan bod?

- Opstapje
- Grote getallen in de wetenschap
- Ons besef van grootte
- een notatiesysteem voor grote getallen
- Groter en Groter: de Snel Stijgende Hiërarchie
- Een helikopterview tot slot?

Grote Getallen?

Opstapje

- ∞ (oneindig) doet niet mee!
- Wanneer vind je een getal “groot”?
- Wat is je favoriete grote getal?
- Ken je nog grotere?
- Grote getallen in de wetenschap

Links

https://sites.google.com/site/largenumbers/

https://googology.fandom.com/wiki/Googology_Wiki

En in tekstdocument

Grote getallen in de wetenschap

$\sim 10^{24}$ Het getal van Avogrado (het aantal atomen/moleculen in een mol)

$\sim 10^{36}$ De verhouding tussen de elektromagnetische en de zwaartekracht

$\sim 10^{63}$ Het volume van het heelal in zandkorrels (Archimedes, 250 vC)

$\sim 10^{80}$ Het volume van het waarneembare heelal in m^3

$\sim 10^{185}$ Datzelfde volume uitgedrukt in kubieke Plancklengtes ($1{,}6\ 10^{-35}$ m)

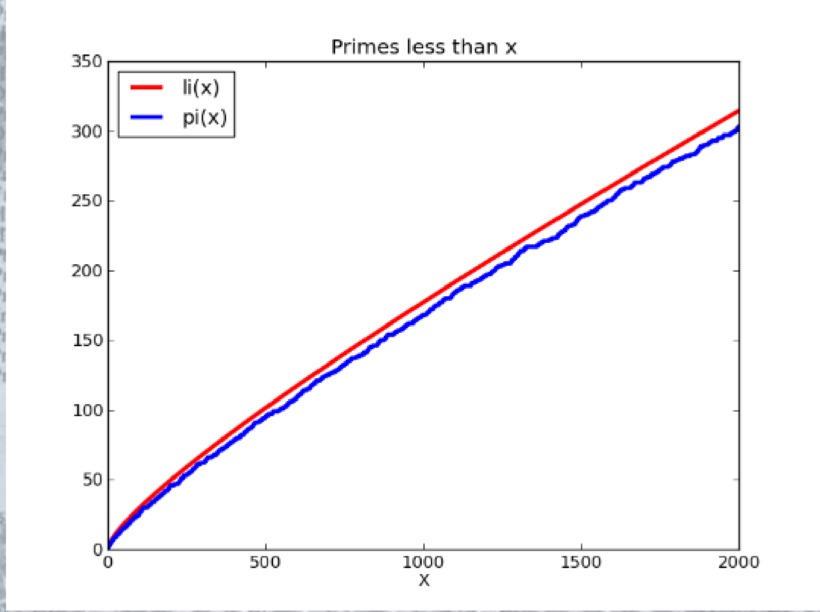
Archimedes

- Het getal van de ossen: $10^{206545} \approx 10^{10^{5,3}}$
- Zijn getalsysteem: $(100.000.000^{100.000.000})^{100.000.000}$

$$= 10^{8.10^{16}} \approx 10^{10^{17}}!$$

De overtreffende trap (I)

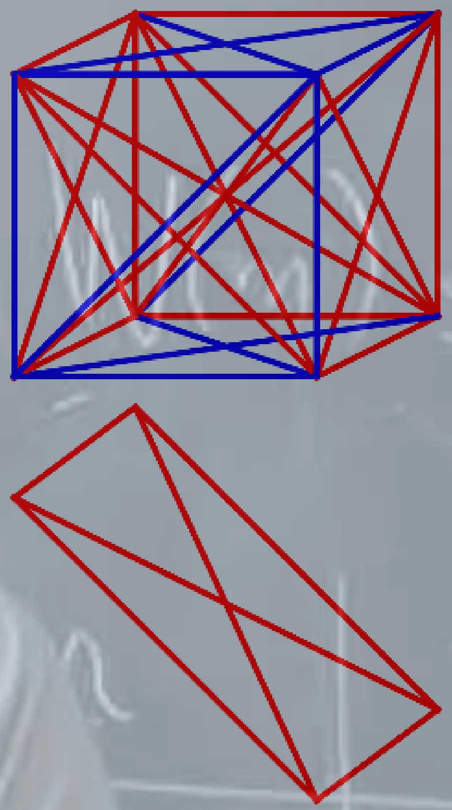
- $\sim 10^{10^{10^{34}}}$ S_{k_1} : Het getal van Skewes (1933)



$$S_{k_1} = e^{e^{e^{79}}} \approx 10^{10^{10^{33,94708381\ldots}}}$$

De overtreffende trap (II)

- $\sim 10^{10^{10^{34}}}$ S_{k_1} : Het getal van Skewes (1933)
- ??? Het getal van Graham (1977)



Ons besef van grootte (relatief I)

De afrondingsfout in Skewes

$$\frac{10^{10^{10^{34}}}}{10^{10^{10^{33,947}}}} = \quad 10^{10^{10^{34}}} \text{ sic!}$$

$S_{k1} = e^{e^{e^{79}}} \approx 10^{10^{10^{33,94708381\ldots}}}$

$\approx 10^{10^{10^{34}}}$

$10^N/10^M=10^{(N-M)}$ toepassen, geeft $10^{\left(10^{10^{34}}-10^{10^{33,947}}\right)}$

N is een getal met 10.10^{33} cijfers en M heeft “maar” $8,851.10^{33}$ cijfers. N ($10^{10^{34}}$) heeft **$1,15.10^{33}$** cijfers meer dan M ($10^{10^{33,947}}$), dus N-M ≈ N.
Een verhouding uitrekenen heeft dus niet veel zin.

Laten we kijken of een machtsfactor werkt, m.a.w. voor welke exponent(!) *X* geldt:

Ons besef van grootte (relatief II)

De machtsverhouding in de afrondingsfout van S$_{k1}$

$$(10^{10^{10^{33,947}}})^{X} = 10^{10^{10^{34}}}$$

$$X \sim 10^{10^{33,061}}$$

$$(10^{10^{10^{33,947}}})^{10^{10^{33,061}}} = 10^{\left(10^{10^{33,947}} . 10^{10^{33,061}}\right)} = 10^{10^{\left(10^{33,947}+10^{33,061}\right)}}$$

$$= 10^{10^{(10^{33}(10^{0,947}+10^{0,061}))}} = 10^{10^{10^{33}(\,8,85+1,15)}} = 10^{10^{10^{34}}}$$

Ons besef van grootte (relatief III)

- $10^{0,0001} = 1,00023$
- $10^{10^{0,0001}} = 10,0053$
- $10^{10^{10^{0,0001}}}$ = 10.122.875.945 dus iets meer dan tien miljard.
- $10^{10^{10^{10^{0,0001}}}}$ heeft dus meer dan tien miljard cijfers!

Ons besef van grootte (absoluut I)

Waar houdt het op?

10 op de vingers van twee handen te tellen

10^{10} (10.000.000.000) de wereldbevolking, tien kuub zand,…
wel 300 jaar, maar geen 3.10^{9} seconden…., en dat zand dan…

Ik kan er wel mee rekenen! $10^{16}, 10^{22}, 10^{185} \approx 10^{10^{2,3}}$

$10^{10^{10}}$ heeft tien miljard cijfers! Verzin een list!
Permutaties over Planckvolumes: $10^{185}! \leq (10^{185})^{10^{185}} \approx$

$$\approx 10^{10^{10^{2,3}}}$$

We zijn er overheen maar ik heb geen benul meer van de grootte van het getal. Het is de structuur die houvast geeft!

Ons besef van grootte (absoluut II)

$10^{10^{10^{10}}}$ Absoluut geen benul! $10^{10^{10^{10}}} \approx 10^{10^{10^{10}}}.\ 10^{10^{10^{2,3}}}$

Ook al voer je iedere seconde opnieuw al die permutaties tussen Planckvolumetjes uit en blijf je dat gedurende het hele bestaan van het heelal doen (zeg een biljoen jaar) dan nog heb je onvoorstelbaar veel heelallen nodig (ik gok ongeveer $10^{10^{10^{10}}}$,☺) om bij $10^{10^{10^{10}}}$ te komen.

- Stoppen met besef! Verder met intuïtie? Gevaarlijk!
- Of varen op structuur en notatie? We zullen wel moeten, want het wordt nog erger!
- Wat moet je anders met een “klein” groot getalletje zoals:

$3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (met een toren van 7.625.597.484.987 3’en hoog)

De pijlomhoog (↑) notatie van Donald Knuth

up arrow notation

- $a{\uparrow}b = a^b = a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a \cdot a$ (met *b* a's) machtsverheffen
- $a{\uparrow\uparrow}b = a{\uparrow}a{\uparrow}a \uparrow a{\uparrow}a \ldots\ldots\uparrow a{\uparrow}a$ (met *b* a's) (tetreren)
- $a{\uparrow\uparrow\uparrow}b = a{\uparrow\uparrow}a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow a \ldots\uparrow\uparrow a$ (met *b* a's) (penteren)
- Stramien: bij elke stap vorige stap herhaald uitvoeren (met *b* a's).
  En altijd van rechts naar links terugwerken: $3{\uparrow\uparrow\uparrow}4 = 3{\uparrow\uparrow}(3 \uparrow\uparrow(3 \uparrow\uparrow 3))$
- Enzovoort, enzovoort en als het teveel pijltjes worden:
- $a{\uparrow}^{n+1}b = a{\uparrow}^n a \uparrow^n a \uparrow^n a \ldots\uparrow^n a$ (met b a's)
- $a{\uparrow}^{n+1}(b+1) = a{\uparrow}^n(a \uparrow^{n+1} b)$ en $a{\uparrow}^{n+1}1 = a$

Voorbeelden

- $4\uparrow 3 =$ $\qquad = 4^3 = 64$
- $4\uparrow\uparrow 3 =$ $\qquad = 4\uparrow(4\uparrow 4) = 4\uparrow 4^4 = 4^{4^4} = 1{,}34.10^{154}$ (tetreren; $^{3}4$)
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 2 =$ $\qquad = 2\uparrow\uparrow 2 = 2\uparrow 2 = 2^2 = 2.2 = 2+2 = 4$!
- $3\uparrow\uparrow\uparrow 3 =$ $\qquad = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3) = 3\uparrow\uparrow(3\uparrow 3\uparrow 3) = 3\uparrow\uparrow(3^{3^3}) =$

$$= 3\uparrow\uparrow 7.625.597.484.987 = 3\uparrow 3\uparrow 3 \ldots\ldots\ldots.\uparrow 3\uparrow 3$$

$$= 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$$ (met 7.625.597.484.987 3'en) $= 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}} \} \, 3^{3^3}$ (3'en)

Het getal van Graham (I)

$$3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3\ ) = 3\uparrow\uparrow\uparrow(3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{3}}}}}}\Big\}\ 3^{3^{3}}\}3\ (3\text{'en}))\quad (3^{3^{3}}=7.625.597.484.987)$$

$$=3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3\ \ldots.3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3\ \ \text{met}\ \ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{3}}}}}}\Big\}\ 3^{3^{3}}\ \}3\ 3\text{'en}$$

$$=\ \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{3}}}}}}\Big\}\ldots\ldots\Big\}\,3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{3}}}}}}\Big\}\ 3^{3^{3}}\ \}3}_{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{3}}}}}}\Big\}\ 3^{3^{3}}\ \}3\ \text{stappen}}\ = G(1)$$

Het getal van Graham (III)

$$\left.\begin{array}{rc}
G(64) = & 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\
G(63) = & 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\
 & \underbrace{\vdots} \\
G(2) = & 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}3 \\
G(1) = & 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3
\end{array}\right\}\text{64 lagen}$$

Conway's notatie doet het beter:

G(64) ligt tussen $3 \to 3 \to 64 \to 2$ en $3 \to 3 \to 65 \to 2$

De Snel Stijgende Hiërarchie

(Fast Growing Hierarchy)

- Zeer systematische methode
- Overklast notatiesystemen zoals de pijl- en pijlkettingnotatie
- Nuttig om grote getallen, notatiesystemen en getalgeneratoren in te schalen en met elkaar te vergelijken
- Twee varianten: functie- en operatorhiërarchie
- Wij kiezen voor de operatorvariant
  - Geen functies nodig
  - Sluit aan bij onze bekende bewerkingen (operatoren)
  - Eerste deel hetzelfde als “pijlomhoog”!

De onderste treden van de hiërarchie

- $m + n$ (optellen, **herhaald** 1 erbij)
- $m \cdot n$ (vermenigvuldigen, **herhaald** optellen)
- m^n (machtsverheffen, **herhaald** vermenigvuldigen: $m.m.\ \ldots.m$ (n keer m)) **($m \uparrow n$)**
- $m\square n$ (tetreren, **herhaald** machtsverheffen: $m^{m^{m^{\cdot^{m}}}}$ (n keer m)) **($m \uparrow\uparrow n$)**
- m⬠n (penteren, **herhaald** tetreren: $m\square\ m\square\ \ldots\ldots\ m\square m$ (n keer m)) **($m \uparrow\uparrow\uparrow n$)**

Een index voor operatoren

- Optellen $\otimes_1$
- Vermenigvuldigen $\otimes_2$
- Machtsverheffen (↑) $\otimes_3$
- Tetreren (↑↑) $\otimes_4$
- Penteren (↑↑↑) $\otimes_5$
- …….. (↑↑ ⋯ ↑↑) $\otimes_{\dots}$

$$m \otimes_k n$$

Tot iemand met een betere naam komt spreek ik zo'n operator uit als

$\otimes_1$ op een, $\otimes_2$ op twee, …., $\otimes_k$ op "*k*"

k heet de index van de bewerking,
m noemen we het grondtal en
n het argument.
Het argument wordt soms ook wel exponent genoemd, naar analogie met machtsverheffen.

De herhaalstap

- $m \otimes_{k+1} n = \ m \otimes_k m \otimes_k \ldots\ldots m \otimes_k m$ (met n m’en)

- De recursieve definitie $(k, m, n \geq 1)$
  1. $m \otimes_{k+1} (n+1) = m \otimes_k (m \otimes_{k+1} n)$
  2. $m \otimes_{k+1} 1 = m$
  3. $m \otimes_1 n = m + n$

- ***Allemaal nog identiek met pijlomhoognotatie***

Voorbeeld $4 \otimes_4 4$ en $4 \otimes_5 4$

- $4 \otimes_4 4 = 4 \otimes_3 (4 \otimes_4 3\,) = 4 \otimes_3 \big(4 \otimes_3 (4 \otimes_4 2\,)\big) =$
  $4 \otimes_3 \Big(4 \otimes_3 \big(4 \otimes_3 \ (4 \otimes_4 1)\big)\Big) = 4 \otimes_3 \big(4 \otimes_3 (4 \otimes_3 \ 4)\big) = 4^{4^{4^{4}}}$

- $4 \otimes_5 4 = 4 \otimes_4 (4 \otimes_5 3\,) = 4 \otimes_4 \big(4 \otimes_4 (4 \otimes_5 2\,)\big) =$
  $4 \otimes_4 \Big(4 \otimes_4 \big(4 \otimes_4 \ (4 \otimes_5 1)\big)\Big) =$
  $4 \otimes_4 \big(4 \otimes_4 (4 \otimes_4 \ 4)\big) = 4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}\}4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}\}4^{4^{4^{4}}}\}4$

$m \otimes_k n$: getallenmatrix (voor $m = 3$)

$3 \otimes_k n$	1	2	3	4	5	....
1	4	5	6	7	8	....
2	3	6	9	12	15	....
3	3	9 (3^2)	27 (3^3)	81 (3^4)	243 (3^5)	....
4	3	27 (3^3)	$3^{3^3} \approx 8.10^{12}$	$3^{3^{3^3}}\}4$	$3^{3^{3^{3^3}}}\}5$	....
5	3	$3^{3^3}\}3$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^3}\}3$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^3}\}3$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^3}\}3$	....
....	....	....	....	....	....	....

Structuren in (de weergave van) getallen (I)

- $m \otimes_4 n$ patroon: $m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}n$ (een machttoren n-hoog)
- $m \otimes_5 n$ patroon: $m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\} \ldots \ldots \ldots .. m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m$
(een reeks van n "machttorens" lang)

$m \otimes_5 n = /\}/\} \ldots \ldots /\}m$ compacte notatie ($(n-1)$ "/" en 1 "m")

Structuren in getallen (II)

- $m \otimes_6 1 \quad\quad m$ (met 1 machttoren, heel kleintje: 1 hoog)
- $m \otimes_6 2 = m \otimes_5 m = /\}/\} \ldots . \}/\}m$ (met m machtorens ($/,m$))
- $m \otimes_6 3 = m \otimes_5 m \otimes_5 m = m \otimes_5 (/\}/\} \ldots . \}/\}m) =$

  $= /\}/\} \ldots \ldots /\}m$ (met $/\}/\} \ldots \ldots /\}m$ machttorens)

$$m \otimes_6 3 = \begin{array}{cc} \underbrace{/\}/\} \ldots . \}/\}m}_{\displaystyle \underbrace{/\}/\} \ldots . \}/\}m}_{\displaystyle m}} & \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Structuren in getallen (III)

Nu kunnen we $m \otimes_6 n$ te lijf:

$$m \otimes_6 n = \left.\begin{array}{c} \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \ldots\ldots. \\ \underbrace{\ldots\ldots.} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ m \end{array}\right] n$$

En als je n door m vervangt

$$= m \otimes_6 m = m \otimes_7 2$$

Structuren in getallen (IV)

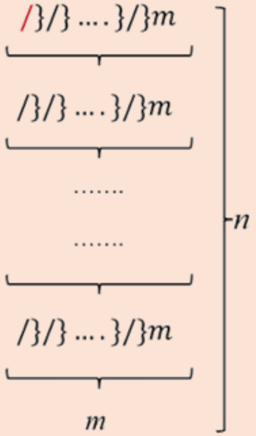
$$m \otimes_7 n = \underbrace{\left.\underbrace{{\color{red}/}\}/\}\ldots.\}/\}m}_{\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{\underbrace{\cdots\cdots}_{\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{m}}}}\right] \left.\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{\underbrace{\cdots\cdots}_{\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{m}}}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots \quad \left]\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{\underbrace{\cdots\cdots}_{\underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m}_{m}}}}\right]m}_{n}$$

Structuren in getallen (V)

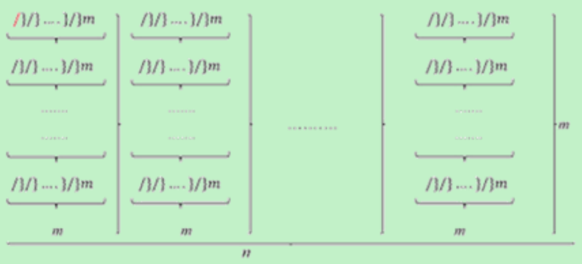
$m \otimes_4 n \qquad m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}} \}n$

$m \otimes_5 n \qquad \underbrace{/\}/\} \ldots \ldots /\}m}_{n}$

$m \otimes_6 n$



$m \otimes_7 n$



$m \otimes_8 n$

Even stilstaan en je hoofd laten tollen

- $10^{10^{10^{10}}}$ ging ons verstand te boven
- $10 \otimes_8 10$ Kijk naar die vorige matrix en vul voor m en n telkens 10 in en bedenk dat de streepjes (/) ook machttorens van 10 zijn
- $10 \otimes_{10} 10$ Je moet er niet aan denken!

En toch zijn we maar amper begonnen!

Effect van m, n en k op de groei

- Het argument *n* ophogen voegt “alleen maar” één kolom of rij toe
- Het grondtal *m* ophogen levert nog minder op
- de index *k* ophogen in $m \otimes_k n$ geeft het grootste effect

  (er komt telkens een groot blok bij, afwisselend boven en links in onze weergave)
- Probeer het zelf met $m \otimes_k n$ is resp. $3 \otimes_3 3$ en $4 \otimes_4 4$
- Kunnen we een nieuwe bewerking maken die *k* groter maakt?

De grote sprong opwaarts (vrij naar Mao)

k \ n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**....**	**....**
1	$m \otimes_1 1$	$m \otimes_1 2$	$m \otimes_1 3$	$m \otimes_1 4$	$m \otimes_1 5$	....	....
2	$m \otimes_2 1$	$m \otimes_2 2$	$m \otimes_2 3$	$m \otimes_2 4$	$m \otimes_2 5$	....	....
3	$m \otimes_3 1$	$m \otimes_3 2$	$m \otimes_3 3$	$m \otimes_3 4$	$m \otimes_3 5$	....	....
4	$m \otimes_4 1$	$m \otimes_4 2$	$m \otimes_4 3$	$m \otimes_4 4$	$m \otimes_4 5$	....	....
5	$m \otimes_5 1$	$m \otimes_5 2$	$m \otimes_5 3$	$m \otimes_5 4$	$m \otimes_5 5$	....	....
....	....	....	....	....	....	$m \otimes_6 6$	....
....	....	....	....	....	....	....	...

Definieer bewerking $\otimes_{di}$

(di van diagonaal)

$$m \otimes_{di} n = m \otimes_n n$$

$$m \otimes_{di} n = m \otimes_n n \geq m \otimes_k n \text{ zo gauw } n \geq k$$

De index bij diagonalisatie

- Diagonaliseren gaan we vaker doen. Dus maar nummeren als *di1, di2* etc. ?
- Veel handiger zullen de limietordinaalgetallen van Cantor blijken te zijn.
- De eerste limietordinaal is “ω”
- Dus in plaats van $\otimes_{di}$ schrijven we nu $\otimes_{\omega}$ maar de betekenis blijft hetzelfde!
- $m \otimes_{di} n = m \otimes_{\omega} n = m \otimes_{n} n$
- Bedenk: We introduceren hier niets “oneindigs” , “ω” is alleen een ander etiket voor de index van een verder eindige bewerking!
- Aan $m \otimes_{n} n$ is niets oneindigs, wel iets groots!
- $3 \otimes_{\omega} 4 = 3 \otimes_{4} 4 = 3^{3^{3^{3}}}$ is nog tamelijk onschuldig maar
- $3 \otimes_{\omega} 100 = 3 \otimes_{100} 100$ is andere koek!
- En het wordt nog erger!

Na diagonalisatie komt weer herhalen

- Na zo’n diagonalisatie stap $m \otimes_{\omega} n$ =$m \otimes_{n} n$ gaan we gewoon weer herhalen
- $m \otimes_{\omega+1} n$ =$m \otimes_{\omega} (m \otimes_{\omega+1} (n-1)) = m \otimes_{\omega} m \otimes_{\omega} \ldots \ldots m \otimes_{\omega} m$ (n m’en)
- Realiseer je je het overweldigende effect van al die $\omega's$: achteraan beginnend stoppen we m in ω, maar in de volgende stap stoppen we al $m \otimes_{m} m$ in ω, en voor $m = 3$ is $m \otimes_{m} m$ =27, daarna rijst het substitutiegetal al snel de pan uit.

Voorbeelden met index $\omega + 1$

- $3 \otimes_{\omega+1} 1 = 3$

  $3 \otimes_{\omega+1} 2 = 3 \otimes_{\omega} (3 \otimes_{\omega+1} 1) = 3 \otimes_{\omega} 3 = 3 \otimes_{3} 3 = 3^3 = 27$

- $3 \otimes_{\omega+1} 3 = 3 \otimes_{\omega} (3 \otimes_{\omega+1} 2) = 3 \otimes_{\omega} 27 = 3 \otimes_{27} 27$

- $3 \otimes_{\omega+1} 4 = 3 \otimes_{\omega} (3 \otimes_{\omega+1} 3) = 3 \otimes_{\omega} (3 \otimes_{27} 27) = 3 \otimes_{(3 \otimes_{27} 27)} (3 \otimes_{27} 27)$

Voorbeelden met index $\omega + 2$

- Het effect van de index nog een keer ophogen is dramatisch:
- $3 \otimes_{\omega+2} 2 \ = 3 \otimes_{\omega+1} (3 \otimes_{\omega+2} 1) = \ 3 \otimes_{\omega+1} 3 = 3 \otimes_{27} 27$
- $3 \otimes_{\omega+2} 3 = 3 \otimes_{\omega+1} (3 \otimes_{\omega+2} 2) = 3 \otimes_{\omega+1} (3 \otimes_{27} 27) =$

  $= 3 \otimes_{\omega} 3 \otimes_{\omega} 3 \otimes_{\omega} \dots \dots . 3 \otimes_{\omega} 3$ met $(3 \otimes_{27} 27)$ $\otimes_{\omega}$'s!!!!
- En dan zijn we nog steeds maar amper begonnen.

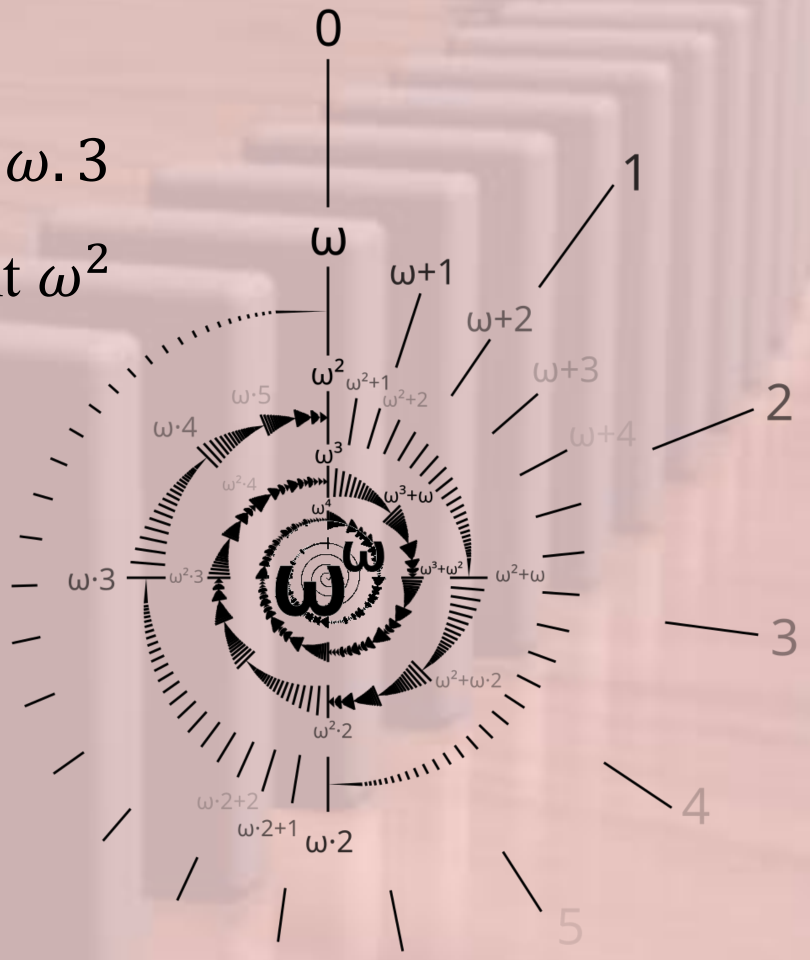
Intermezzo over ordinaalgetallen (I)

- Ordinaalgetallen zijn een uitbreiding van de natuurlijke getallen
- Het gaat daarbij vooral om de volgorde
- Het begint allemaal met de lege verzameling ofwel het getal 0
- Vervolgens is ieder volgend ordinaalgetal de verzameling die al zijn voorgangers bevat

  $0 = \{\}$ (de lege verzameling)
  $1 = \{0\}$ (de verzameling die 0 bevat)
  $2 = \{0,1\}$
  $3 = \{0,1,2\}$
  …..
  …
  met als limietordinaal:
  $\omega = \{0,1,2,3,4,5 \ldots \ldots \ldots \ldots ..\}$ (de verzameling van alle natuurlijke getallen) , vervolgens
  $\omega + 1 = \{0,1,2,3,4,5 \ldots \ldots, \{0,1,2,3,4,5 \ldots \ldots \ldots \ldots ..\}\}$
  en vervolgens, $\omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ met als limietordinaal $\omega . 2$

Intermezzo over ordinaalgetallen (II)

- Na $\omega.2$ komt $\omega.2+1, \omega.2+2,$ … … afgesloten met $\omega.3$
- Op dezelfde manier verder naar $\omega.4$, $\omega.5$,… en komt ω^2
- Je snapt het al: ω^2, ω^3, ω^4, ….. eindigend met ω^ω
- en verder met ω^ω+1, ….



Intermezzo over ordinaalgetallen (IV)

- ω^{ω}+1 mondt uiteindelijk ook weer uit in ω^{ω^2}, ω^{ω^3}, ω^{ω^4}, …, $\omega^{\omega^{\omega}}$
- En na heel veel stappen passeren we $\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$, $\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}$, …., $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ = ϵ_0
- En je raadt het al, hierna komt weer $\epsilon_0 + 1$ etc.

Intermezzo met ordinaalgetallen (V)

- Dit was grote stappen, snel thuis, maar realiseer je dat we onnoemelijk veel stappen hebben overgeslagen.
- Denk maar aan alle “polynomen” die je kunt maken, zoals
  - $\omega^2 \cdot 4 + \omega \cdot 9 + 13$ maar ook
  - $\omega^{(\omega^2 \cdot 4 + \omega \cdot 9 + 13)} + \omega^9 \cdot 12 + \omega \cdot 3 + 1$
  - Of, of , …….

De lange weg naar $\bigotimes_{\epsilon_0}$

- $\bigotimes_{\omega+1}$en $\bigotimes_{\omega+2}$ staan pas aan het begin van een ontzettend lange rij.
- We passeren alle veelvouden, machten en machttorens, maar ook alle tussenliggende operatoren zoals b.v.
  - $\bigotimes_{\omega^6.5+\omega^4.2+\omega^2.99+11}$
  - $\bigotimes_{\omega^{\omega^{\omega}}.3+\omega^6.5}$
  - En ga zo maar door tot je bij $\bigotimes_{\epsilon_0}$ uitkomt.
  - Wij stoppen nu maar natuurlijk kun je gewoon verder met $\bigotimes_{\epsilon_0+1}$,…
- Voor een eerste kennismaking is het voorlopig groot genoeg.
- Ofschoon….

TREE(3)

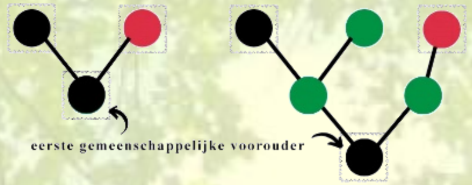
- TREE(3) (i.h.a. TREE(n))
- Een spel met “bomen” (grafen) met 3 (n) verschillende “zaden” (knopen van verschillende kleur)
- Doel: maak een zo lang mogelijke reeks onder de volgende regels:
  - Boom *k* heeft max *k* zaden
  - Spel stopt als je een boom maakt waarin een vorige is “ingebed”

Wat is “ingebed”?

- Een eerdere boom komt als deel voor in een latere boom zodat een gemeenschappelijke voorouder in de eerdere boom correspondeert met de gemeenschappelijke voorouder in de latere boom

Ingebed

Niet ingebed

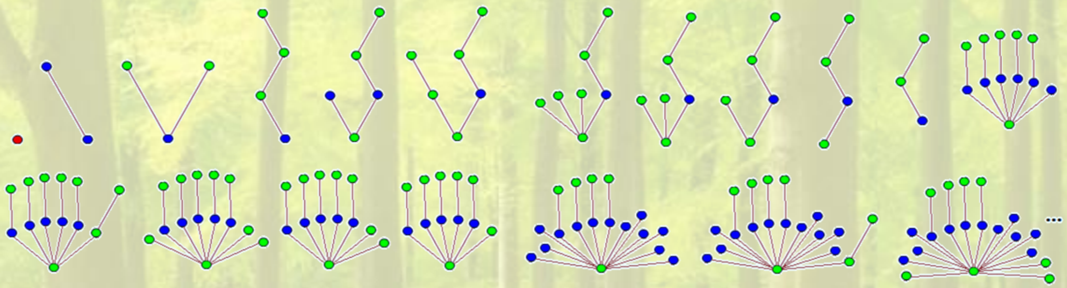


Ingebed

Maak nu een zo groot mogelijk “bos”.

TREE(1)  TREE(1) =1

TREE(2)  beter  TREE(2) =3

TREE(3)  TREE(3) =??

Hoe groot is TREE(3)

- TREE(3) is eindig
- TREE(*n*) is eindig (bewijs Kruskal)
- Maar niemand weet hoe groot TREE(3) precies is
- TREE(3) is wel véél groter dan $m \otimes_{\epsilon_0} n$
- Ook als we G_{64} substitueren voor *m* en *n*: $TREE(3) > G_{64} \otimes_{\epsilon_0} G_{64}$
- Wat denk je nu van: $TREE(G_{64}) \otimes_{\epsilon_{0+1}} TREE(G_{64})$

Samenvatting (I)

- Onze astronomische grote getallen blijken maar kleintjes te zijn
- Ons (mijn) besef van grote getallen is definitief weg bij $10^{10^{10^{10}}}$
- Inclusief ons gevoel voor verhoudingen (Afronding getal van Skewes)
- Alleen de structuur in notaties helpt ons enigszins verder
- De pijlnotatie van Knuth toont de kracht van herhaling:

$$a\uparrow^{n+1}b \;=\; a\uparrow^{n}a\uparrow^{n}a\uparrow^{n}a\;\ldots\uparrow^{n}a$$

Samenvatting (II)

- De snel stijgende hiërarchie levert uiteindelijk het grote werk met
  - Naast itereren: $m \otimes_{k+1} n = \ m \otimes_k m \otimes_k \ldots \ldots m \otimes_k m$ ook
  - Diagonaliseren als extra stap die de index van de bewerking dramatisch verhoogt
  - $m \otimes_{di} n = m \otimes_\omega n = m \otimes_n n$
  - (Limiet)ordinaalgetallen (1, 2, .., ω, $\omega + 1$, …., $\omega \cdot 2$,…, $\omega \cdot 3$,…. ω^2 ,…) als handige indexen

- Er is nog veel meer te beleven maar daarvoor mag je zelf op avontuur (links)

Slotopmerkingen: de helikopterview?

- Wel kennisgemaakt, maar geen overzicht, dus geen helikopterview
- We “kennen” maar ontzettend weinig grote getallen
- De meeste (afgerond “alle” ;-)) zijn, zelfs in ons Planckheelal, niet te beschrijven.
- We weten niet of ze priem zijn, of even of volmaakt of een palindroom of een kwadraat of, of, of …..
- ***"Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen." (Wittgenstein)***
- Bestaan al die getallen echt?
- Is $G(64) \otimes_{\epsilon_0+1} G(64)$ “ergens” of is het een constructie van symbolen waar we een trukendoos op los kunnen laten?

Einde: Oneindig?

- $TREE\big(G(64)\big) \otimes_{\epsilon_0+TREE(G(64))+1} TREE(G(64))$ is een nog veel groter getal, maar staat in het rijtje van natuurlijke getallen nog steeds vlak naast 1. (Niet dan?)
- Oneindig veel natuurlijke getallen worden er dan wel erg veel.
- Om over een oneindig groot heelal maar niet te spreken. (weer vrij naar Wittgenstein)

$$\infty$$