Grote getallen

“Als er een groot getal bestaat zijn er maar weinig kleine getallen.”

Daedalus Workshop 26 sept 2024

Oude Sterrewacht

Lambert Swaans

Inhoud

1. Introductie

Ik denk dat de meeste mensen al in hun kinderjaren gefascineerd worden door grote getallen. Honderd werd toen misschien je eerste grote getal en de stap naar honderdeneen was beslist geen gemakkelijke. Duizend was een volgende mijlpaal, die je al beredenerend bereikte, zonder echt te tellen, duizendeneen was al niet moeilijk meer en vervolgens kwam je vanzelf met duizelingwekkende getallen als duizend duizend of miljoen miljoen voordat je leerde dat het een officieel "miljoen" heette en het ander "biljoen". Misschien maakte je je nog druk om al die volgende "iljoenen" maar voor mij hield het met deciljoen wel op: een 1 met zestig nullen. Niet dat de rest geen naam mocht hebben maar nodig was het niet. Je kon gewoon het getal in cijfers opschrijven en het aantal cijfers tellen. Je leerde machtsverheffen en exponenten te gebruiken. Een getal als 1.234.567.891.011.121.314, wist je, is iets groter dan 10^{18} en dus ongeveer honderd keer kleiner dan 10^{20}.
Met machtsverheffen kon je ook anderen overtroeven, zeker als ze met die kunstgreep nog niet zo vertrouwd waren: Wat is het grootste getal dat je met drie negens kunt schrijven? 999 lachte je weg en 99^9 en 9^{99} kwamen ook niet in de buurt, al hadden degenen die die getallen noemden wel de klok horen luiden. 9^{9^9} was jouw topper die alle concurrenten plat sloeg.

N.B. machttorens zoals 9^{9^9} reken je van "boven naar beneden" uit. Met haakjes zouden we het zo schrijven: $9^{(9^9)} = 9^{387.420.489}$ (uitgeschreven een getal met bijna 370 miljoen cijfers. Wat veel meer is dan $(9^9)^9 = 387.420.489^9$ = 196.627.050.475.552.913.618.075.908.526. 912.116.283.103.450.944.214.766.927.315.415.537.966.391.196.809 dat nog geen honderd cijfers heeft.

Vanavond gaan we een flink aantal stappen verder, al blijft het bij een korte kennismaking. Ik hoop wel een spoor uit te zetten waarlangs je zelf verder op ontdekking kunt. Hieronder alvast twee algemene links waar je nog veel meer kunt vinden dan ik vanavond vertel.
https://sites.google.com/site/largenumbers/
https://googology.fandom.com/wiki/Googology_Wiki
O, en voor ik het vergeet, ∞ (oneindig) doet niet mee want oneindig is geen (natuurlijk) getal: Je kunt er nooit komen met tellen en ook de gewone rekenregels voor natuurlijke getallen gaan niet op voor oneindig.

Stel $\infty - 1 = x$
· *x niet eindig, want eindig plus 1 is eindig*
· *x niet* ∞*, want dan* $1 = 0$

Oneindig blijft het mysterie op de verre, verre achtergrond.

N.B. Tekst in vakken met een onderbroken omtreklijn zijn voor iedereen. Is de lijn ononderbroken dan mag je de inhoud overslaan tenzij je echt een beetje meer wil weten.

2. Betekenisvolle "grote" getallen in de wetenschap

We kennen allemaal wel een aantal "grote" getallen die met onze fysische werkelijkheid te maken hebben of in de natuurwetenschappen een grote rol spelen. Je kent er beslist meer maar een aantal staan er hieronder:

$\sim 10^{24}$	Het getal van Avogrado (het aantal moleculen in een mol)
$\sim 10^{36}$	De verhouding tussen de elektromagnetische en de zwaartekracht
$\sim 10^{63}$	Het volume van het heelal in zandkorrels volgens Archimedes (250 vC)
$\sim 10^{80}$	Het volume van het waarneembare heelal in m^3
$\sim 10^{185}$	Datzelfde volume uitgedrukt in kubieke Plancklengtes (1,6 10^{-35} m)

Denk niet dat we met 10^{80} of 10^{185} Archimedes overtroefd hebben want zijn raadsel over het getal van de ossen heeft een kleinste oplossing in de orde van grootte van $10^{206545} \approx 10^{10^{5,3}}$.

Archimedes had zelfs een getalsysteem waarmee hij tot $(100.000.000^{100.000.000})^{100.000.000}$ kon tellen. Dat is dus

$$100.000.000^{100.000.000 \cdot 100.000.000} = (10^8)^{(10^{16})} \approx 10^{8 \cdot 10^{16}} \approx 10^{10^{17}}!$$

https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/37/stukjes-pythagoras/jg57/2018-06-zandrekenaar-i.pdf
https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/37/stukjes-pythagoras/jg58/2018-09-zandrekenaar-ii.pdf
https://pyth.eu/archimedes-de-runderen-van-de-zonnegod

Maar we kunnen beter. In de wiskunde komen we enkele getallen tegen die nog veel groter zijn. Twee voorbeelden: Het eerste en lang recordhouder in het "Guiness Book of Records" is het getal van Skewes. Het tweede is het getal van Graham.

$\sim 10^{10^{10^{34}}}$	Sk_1 : Het 1e getal van Skewes (1933)
???	Het getal van Graham (1977)

De "exacte" waarde van het eerste getal "Sk_1" van Skewes is

$$Sk_1 = e^{e^{e^{79}}} \approx 10^{10^{10^{33,94708381\ldots}}}$$

https://sites.google.com/site/largenumbers/home/2-3/skewes-numbers
https://sites.google.com/site/largenumbers/home/3-2/3-2-9-graham

Het getal van Graham is zo groot dat we het nu nog niet op kunnen schrijven. Straks maken we kennis met notaties waardoor dat wel gaat lukken.

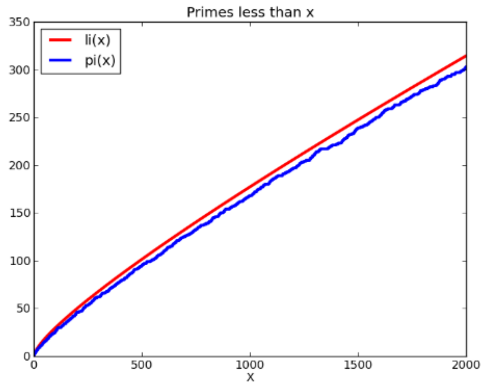
Oorsprong van het getal van Skewes

Het onderzoek naar priemgetallen is een belangrijk en omvangrijk aandachtsgebied in de wiskunde. $\pi(x)$ is het aantal priemgetallen $p \leq x$. Een goede benadering voor $\pi(x)$ is $\mathrm{li}(x)$, de logarithmische integraalfunctie. Zie figuur rechts.
Het lijkt dat $\mathrm{li}(x) \geq \pi(x)$ voor alle x.

Skewes toonde aan dat er een getal s moet zijn met s $< Sk_1$ waarvoor $\pi(s) > \mathrm{li}(s)$. En $Sk_1 = e^{e^{e^{79}}}$.

Hij ging er daarbij van uit dat de Riemann-hypothese juist was. Later berekende hij een tweede getal waarvoor hetzelfde gold maar zonder dat hij daarbij de Riemann-hypothese nodig had.

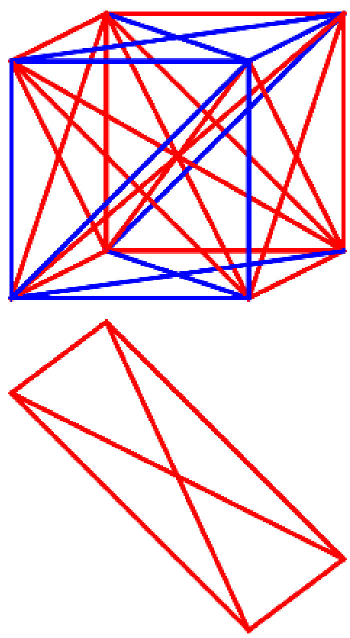
Dit 2e getal van Skewes = $e^{e^{e^{7,705}}}$ $(\approx 10^{10^{10^{964}}})$



Inmiddels zijn er nauwkeuriger grenzen waarbinnen $\pi(x) \geq \mathrm{li}(x)$ nl. $10^{14} < x < 1,39822.10^{316}$

Het getal van Graham

Lijkt het getal van Skewes al reusachtig groot, het wordt totaal overklast door het getal van Graham. Het probleem zelf dat Graham probeerde te tackelen is vrij simpel uit te leggen. In een vierkant (2 dimensies) kun je alle verbindingen tussen de hoekpunten zo blauw of rood kleuren dat er geen (vlak)vierhoek ontstaat waarvan alle verbindingslijnen dezelfde kleur hebben. Ook voor de hoekpunten van een kubus (3 dimensies) is dat te doen. Voor een hyperkubus (4 dimensies) wordt het al lastiger om dat uit te zoeken. Graham toonde aan dat er een N-dimensionale hyperhyperkubus is, met $N \leq$ getal van Graham, waarvoor het niet te vermijden is dat er zo'n vierhoek met dezelfde kleur ontstaat.



3. Ons besef van grootte

3.1. Even groot?

Het getal van Skewes biedt ons een paar aardige aanknopingspunten om eens te kijken naar grootteverhoudingen tussen grote getallen en benaderingen.

Skewes en Googolplex

Het eerste getal van Skewes is echt heel veel groter dan een googolplex.

Googol = 10^{100}

Googolplex = $10^{Googol} = 10^{10^{100}}$

Probeer de verhouding maar uit te rekenen: getal van Skewes gedeeld door googolplex

$10^{10^{10^{34}}} / 10^{10^{100}} \approx 10^{10^{10^{34}}}$! Verbazingwekkend? Reken maar mee.

Want met $10^N/10^M=10^{(N-M)}$ wordt de uitkomst van de verhouding $10^{(10^{10^{34}}-10^{100})}$.
Kijken we naar de exponent dan zie we dat M (10^{100}) verwaarloosbaar klein is t.o.v. N $(10^{10^{34}})$. N is een getal met bijna 10 kwintiljard cijfers en M heeft er maar 101. Het verschil is dan nog steeds een getal met bijna 10 kwintiljard cijfers!

De afrondingsfout in het getal van Skewes

We hebben het getal van Skewes afgerond als $Sk_1 = 10^{10^{10^{34}}}$. Terwijl eigenlijk

$Sk_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{79}}} \approx 10^{10^{10^{33,94708381\ldots}}}$

$10^{10^{10^{33,947}}}$ zou dus een iets betere benadering zijn. Hoe groot is denk je de "fout" in onze eerste (grove) benadering. Wat denk je dat de onderlinge verhouding tussen die twee getallen is?

$$\frac{10^{10^{10^{34}}}}{10^{10^{10^{33,947}}}} = 10^{\left(10^{10^{34}}-10^{10^{33,947}}\right)} = 10^{(N-M)}$$

N is een getal met 10.10^{33} cijfers en M met $8{,}851.10^{33}$ cijfers. (In het geval met Googolplex had M maar 101 cijfers). Maar ook nu heeft N er veel en veel meer.
N $(10^{10^{34}})$ heeft $1{,}15.10^{33}$ cijfers meer dan M $(10^{10^{33,947}})$, dus ook nu N-M ≈ N.
Een verhouding uitrekenen heeft dus niet veel zin.

Laten we kijken of een machtsfactor werkt, m.a.w. voor welke exponent(!) *X* geldt:

$$(10^{10^{10^{33,947}}})^X = 10^{10^{10^{34}}}?$$

X blijkt ~ $10^{10^{33,061}}$ te zijn:

$$(10^{10^{10^{33,947}}})^{10^{10^{33,061}}} = 10^{\left(10^{10^{33,947}}.10^{10^{33,061}}\right)} = 10^{10^{(10^{33,947}+10^{33,061})}}$$

$$=10^{10^{(10^{33}(10^{0,947}+10^{0,061}))}} = 10^{10^{10^{33}(8,85+1,15)}} = 10^{10^{10^{34}}}$$

Onze gekozen benadering, $10^{10^{10^{34}}}$, blijkt voor onze "normale" begrippen echt enorm veel groter te zijn dan een "iets" betere benadering als $10^{10^{10^{33,947}}}$! De afwijking in het meest significante getal is minder dan 2 promille ($\frac{33,947-34}{33,947}$)! Toch zullen we eraan wennen om dit een goede benadering te noemen!

Trouwens het afkappen na de derde decimaal levert al een enorme fout op. Reken zelf maar "het verschil" uit met 33,94708 als hoogste exponent.

Een goed idee krijg je al van het volgende rijtje :

$10^{0,0001} = 1,00023$

$10^{10^{0,0001}} = 10,0053$

$10^{10^{10^{0,0001}}} = 10.122.875.945$ dus iets meer dan tien miljard. Nog een stapje erbij en

$10^{10^{10^{10^{0,0001}}}}$ heeft dus meer dan tien miljard cijfers!

Maar over zelfs tien miljard cijfers meer of minder zullen we ons straks niet druk meer maken.

https://en.wikipedia.org/wiki/Large_numbers

3.2. Waar houdt ons besef op?

De eerste keer dat ik geconfronteerd werd met het enorme verschil in grootte tussen $10^{10^{10^{34}}}$ en $10^{10^{10^{33,947}}}$ realiseerde ik me dat ik eigenlijk totaal geen benul had van de grootte van die getallen. Ik vond $10^{10^{10^{34}}}$ eigenlijk best wel een goede benadering voor het getal van Skewes, me niet realiserend dat "mijn benadering" er een factor $10^{10^{10^{33,9999999...}}}$ naast zat.

Ons besef van groottes van en verhoudingen tussen getallen raken we al vrij snel kwijt. Laten we zo'n machttoren van 10'en eens van het begin af aan opbouwen en kijken waar het schip strandt:

10 kunnen we op de vingers van twee handen tellen, geen probleem.

10^{10} (10.000.000.000) is ongeveer de grootte van de wereldbevolking. Ik stel me daar wat bij voor ofschoon ik al die mensen nog nooit bij elkaar gezien heb.
Met 10 kuub zand, een flinke vrachtwagen vol, heb ik ook ongeveer 10^{10}zandkorrels, al kan ik er al een factor 10 naast zitten.
Sinds de geboorte van mijn betbetbetbetbetbetovergrootvader zijn er ongeveer 10^{10} seconden verstreken, dat is ongeveer 300 jaar. 300 jaar zegt me meer gezien mijn leeftijd, maar dat ik er al bijna 3.10^{9} seconden op heb zitten, zegt me weer niks. Ik kan er mee rekenen maar meer niet. Maar met rekenen kan ik de hele wereld aan. Een lichtjaar is ongeveer 10^{16} meter. Er zijn 10^{22} sterren in ons waarneembare heelal en als ik het volume van ons heelal uitdruk in Planckvolumes vind ik die $10^{185} \approx 10^{10^{2,3}}$en ben ik ver over de 10^{10} heen en op weg (nou ja, op weg, u weet wel beter) naar $10^{10^{10}}$.

$10^{10^{10}}$ is praktisch al niet meer uit te schrijven want het heeft 10.000.000.000 cijfers. Alhoewel als iedereen op aarde meeschrijft is het maar 1 cijfer per persoon, dat moet kunnen. Maar mijn besef hoe groot het getal zelf feitelijk is, is er dan allang niet meer. Ik kan er wel dingen bij verzinnen zoals bv. "Stel dat ieder Planck-volume in het waarneembare heelal zijn eigen karakteristieke inhoud aan momentane deeltjes heeft, dan zou ik permutaties kunnen maken over alle Planck-volumes. We gebruiken onze "benadering" voor $n! = n^n$en krijgen $(10^{185})^{(10^{185})} = 10^{185.10^{185}} = 10^{10^{2,3}.10^{185}} = 10^{10^{187,3}} = 10^{10^{10^{2,3}}}$ en jawel we zijn eroverheen, maar ik heb geen benul van de grootte van dat getal. Het is de structuur die me houvast geeft.

En bij $10^{10^{10^{10}}}$ ben ik echt weg. $10^{10^{10^{10}}}$ is ongeveer $10^{10^{10^{10}}}$ keer groter dan $10^{10^{10^{2,3}}}$ dus al voer je iedere seconde opnieuw al die permutaties tussen Planckvolumetjes uit en blijf je dat gedurende het hele bestaan van het heelal doen (zeg een biljoen jaar) dan nog heb je onvoorstelbaar (ik gok ongeveer $10^{10^{10^{10}}}$,☺) heelallen nodig om bij $10^{10^{10^{10}}}$ te komen.
Zullen we hier maar stoppen met ons besef? En onze intuïtieve benaderingen accepteren?
We zullen wel moeten, want het wordt nog erger. We komen straks "kleine" grote getallen tegen zoals

$$3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \quad \text{(met een toren van 7.625.597.484.987 3'en hoog),}$$

dan kijk je zelfs niet meer op een paar miljoen drietjes meer of minder. Terwijl één 3 al een immens verschil maakt.

Met dergelijke getallen wordt het trouwens tijd aandacht te besteden aan onze notatie want je ziet natuurlijk al gebeuren dat het getal dat het aantal exponenten in de toren beschrijft ook de pan uit gaat rijzen!

4. Notaties voor grote getallen

4.1. Intro: het grote-getallenduel

Een aardige illustratie voor de mogelijkheid om steeds grotere getallen compact op te schrijven is het begin van het grote-getallenduel. Dat duel werd op 26 Januari 2007 uitgevochten aan de Princeton Universiteit tussen twee docenten (Agustín Rayo van het MIT en Adam N. Elga van Princeton University) . De wedstrijd was bedoeld om de interesse voor wiskunde en wetenschapsfilosofie te stimuleren. Er waren wat simpele regels afgesproken om flauwe zetten te voorkomen.

Elga begon sportief met het trekken van een simpel streepje, |, op het bord (een 1), Rayo zette er een tiental streepjes achter, |||||||||||. Je zou dat kunnen interpreteren als elf maar met ons decimaal positiestelsel in gedachten maken we een reuzensprong: 11111111111, een getal ruim elf miljard keer groter. Vervolgens veegde Elga met een vinger dwars door de onderkant van de strepen, te beginnen met de derde. Daar stond nu 11!!!!!!!!!. Een enorm getal, als je weet waar het uitroepteken voor staat natuurlijk!

11! is 39.916.800 en 11!! is al ongeveer $6.10^{286.078.170}$ en dan hebben we nog 7 keer faculteit te gaan. Met de volgende faculteit erbij komen we in de buurt van het getal van Skewes maar daarna vliegen we het voorbij.
En toch wordt voor echte grote getallen de rij faculteittekens te lang om zinnig te gebruiken, het gaat te langzaam omhoog.

> n! groeit minder snel dan n^n. $n^n! < (n^n)^{n^n} = n^{n.n^n} = n^{n^{n+1}} \approx n^{n^n}$
>
> $n^{n^{n+1}}! < (n^{n^{n+1}})^{n^{n^{n+1}}} = n^{(n^{n+1}.n^{n^{n+1}})} \approx n^{n^{n^n}}$.
>
> Bij iedere faculteit komt er “alleen maar” een n-macht bij in de toren.

Er zijn betere notatiemethodes voor grote getallen. We zullen de belangrijkste twee hier bespreken.

En hoe het duel verder verloopt en afloopt moet je zelf maar nalezen.

http://web.mit.edu/arayo/www/brink-duel.pdf

Wij gaan naar twee effectievere notaties kijken.

4.2. De pijlomhoog (↑) notatie van Donald Knuth

(up arrow notation)

De regels zijn simpel.

$a{\uparrow}b \;=\; a^b \;=\; a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a \cdot a$ (met b a's) machtsverheffen

$a{\uparrow\uparrow}b = \; a{\uparrow}a{\uparrow}a \;{\uparrow}a{\uparrow}a \;\ldots\ldots{\uparrow}a{\uparrow}a$ (met b a's) (tetreren)

$a{\uparrow\uparrow\uparrow}b \;=\; a{\uparrow\uparrow}a \;{\uparrow\uparrow}a \;{\uparrow\uparrow}a \;\ldots{\uparrow\uparrow}a$ (met b a's) (penteren)

etc.

Algemeen: $a{\uparrow}^{n+1}b \;=\; a{\uparrow}^n a \;{\uparrow}^n a \;{\uparrow}^n a \;\ldots{\uparrow}^n a$ (met b a's) of heel formeel:

$a{\uparrow}^{n+1}(b+1) \;=\; a{\uparrow}^n(a\,{\uparrow}^{n+1}b)$ en $a{\uparrow}^{n+1}1 \;=\; a$

De axioma's van Peano zijn de basis voor de constructie/definitie van de natuurlijke getallen. Die axioma's zijn (in normaal Nederlands):

1. nul is een natuurlijk getal,
2. de opvolger van een natuurlijk getal is een natuurlijk getal,
3. nul is niet de opvolger van een natuurlijk getal,
4. zijn de opvolgers van natuurlijke getallen gelijk, dan zijn ook deze natuurlijke getallen gelijk,
5. geldt een eigenschap voor het getal nul en geldt hij ook voor de opvolger van ieder getal met die eigenschap, dan hebben alle natuurlijke getallen deze eigenschap.

Axioma 2 kun je ook lezen als "doe er 1 bij " b.v. de opvolger van 6 = 6+1 = 7

Dit herhaald doen b.v. 5 keer is hetzelfde als 5 er bij optellen:
6 + (1+1+1+1+1) = 6+5 = 11.

En zo levert herhaald optellen vermenigvuldigen op (6.5)=6+6+6+6+6=30

En herhaald vermenigvuldigen machtsverheffen: 6^5=6 ·6 ·6 ·6 ·6=7776

En herhaald machtsverheffen tetreren en herhaald tetreren penteren en ……

Als optellen de eerste herhaalstap is dan is vermenigvuldigen de tweede, machtsverheffen de derde, tetreren de vierde (tetra betekent vier, denk maar aan tetraëder) en penteren de vijfde (penta is vijf, denk aan pentagon b.v.)

Voorbeelden:

$4{\uparrow}3 = 4^3 = 64$

$4{\uparrow\uparrow}3 = 4{\uparrow}4{\uparrow}4 = 4^{4^4} = 1{,}34.10^{154}$ (soms wordt tetreren ook wel genoteerd als ${}^{3}4$)

$2\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 2\uparrow\uparrow 2 = 2\uparrow 2 = 2^2 = 2.2 = 2+2 = 4$!

$3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3\ ) = 3\uparrow\uparrow\uparrow(3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}\ \}\ 3^{3^3}\}3$ (3'en))
(3^{3^3}=7.625.597.484.987)

Het getal achter de accolade (en eronder bij een liggende accolade) geeft het aantal elementen van de reeks aan waarop de accolade betrekking heeft.

In $3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}\ \}\ 3^{3^3}\}3$, is $3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}$ het getal waar het omgaat. De hoogte van de machttoren staat achter de accolade te weten 3^{3^3} (=7.625.597.484.987), dus $3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}$ is een machttoren van 7.625.597.484.987 3'en hoog. Volledigheidshalve nemen we ook de laatste 3 nog mee om in $3^{3^3}\}3$ om aan te geven dat 3^{3^3} een toren van 3 3'en is. Voor 3 lijkt dat overdreven maar voor $9^{9^{\cdot^{\cdot^{9}}}}\}9$ is dat wel weer handig en zo blijven we consequent.

$$=3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3 \ldots\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3 \text{ met } 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}\ \}\ 3^{3^3}\ \}3 \text{ 3'en}$$

$$= \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}\ \}\ldots\ldots\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}\ \}\ 3^{3^3}\ \}3}_{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}\ \}\ 3^{3^3}\ \}3 \text{ 3'en}}$$

Noem dat getal G(1).

We kunnen nu het getal van Graham te lijf:

$G(2) = 3\uparrow\uparrow\ldots\ldots\uparrow\uparrow 3$ (met G(1) omhoogpijlen)

$G(3) = 3\uparrow\uparrow\ldots\ldots\uparrow\uparrow 3$ (met G(2) omhoogpijlen)

$G(4) = 3\uparrow\uparrow\ldots\ldots\uparrow\uparrow 3$ (met G(3) omhoogpijlen)

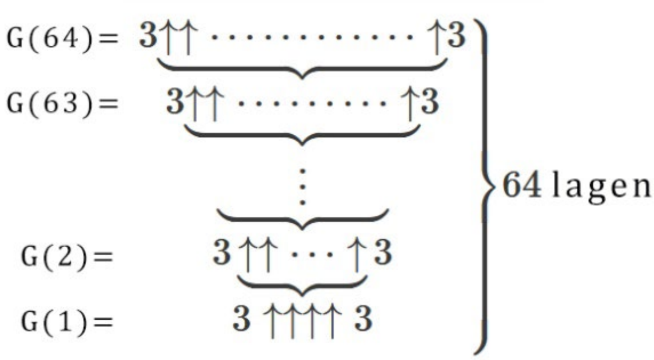
en zo verder. Voor iedere stap geldt:

$G(n+1) = 3\uparrow\uparrow\ldots\ldots\uparrow\uparrow 3$ (met G(n) omhoogpijlen)

En als we dan eindelijk bij G(64) arriveren zijn we er.

Graham's getal = G(64)

Wat grafischer uitgedrukt ziet dat er zo uit:



Het staat er en we krijgen een flauwe notie van de grootte van Graham’s getal maar eigenlijk schiet Knuth’s notatie hier tekort. Conway (James Horton), de Conway van o.a. “Game of Life”, heeft voor dit soort én veel grotere getallen een andere notatie ontwikkeld.

4.3. De pijlketting (→) notatie van James Conway

(Chained Arrow Notation)

De regels van de pijlketting-notatie bouwen voort op de pijlnotatie van Knuth.

https://sites.google.com/site/pointlesslargenumberstuff/home/2/chainarrows
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Conway_chained_arrow_notation

Een Conway pijlketting bestaat uit een reeks getallen gescheiden door pijlen zoals bijvoorbeeld: 2→3→4→5→6→7→8→9 (de cijfers natuurlijk niet perse in deze volgorde!)

Conway definieert zijn notatie als volgt:

1) $a \to b \to c = a \uparrow^{c} b = a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow b$ (met c omhoogpijlen)
2) $a \to b \to \ldots \to x \to y \to 1$ is een synoniem voor $a \to b \to \ldots \to x \to y$
3) En $a \to \ldots x \to y \to (z+1) =$
   a) $a \to \ldots x$ als $y = 1$
   b) $a \to \ldots x \to (a \to \ldots x) \to z$ als $y = 2$
   c) $a \to \ldots x \to (a \to \ldots x \to (a \to \ldots x) \to z) \to z$ als $y = 3$
   Denk eraan: eerst haakjes uitwerken!

$2\to3\to4 = 2\uparrow^{4}3 = 2\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow3 = 2\uparrow\uparrow\uparrow2\uparrow\uparrow\uparrow2 = 2\uparrow\uparrow\uparrow4 = 2\uparrow\uparrow2\uparrow\uparrow2\uparrow\uparrow2 = 2\uparrow\uparrow2\uparrow\uparrow4 =$

$= 2\uparrow\uparrow2^{2^{2^{2}}} = 2\uparrow\uparrow65.536 = 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (een machttoren 65.536 2'en hoog!)

Het is natuurlijk regel (3) die zorgt dat lange kettingen enorm grote getallen opleveren ook al zijn de getallen zelf klein: $3\to4\to5\to2 = 3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3^{4}}4}4}4}4$ (zie inzet op de volgende pagina.)

Berg je dus maar voor $5\to5\to5\to5\to5\to5$ of een reus als $3 \to^{100} 3$

Grahams getal ligt in Conway's notatie tussen $3\to3\to64\to2$ en $3\to3\to65\to2$. Je kunt dat zelf aantonen door $3\to3\to2\to2$, $3\to3\to3\to2$, $3\to3\to4\to2$ …. uit te rekenen en zien hoe zich dat ontwikkelt en verhoudt tot G1, G2, G3 etc.

Een nog sterkere notatie dan Conway's is die van Bowers (BEAF) met ludieke benamingen voor de diverse componenten van zijn (matrix) notatie, zoals vliegtuig, piloot, copiloot en passagiers. Maar zo'n vlucht mag je zelf boeken.

https://googology.fandom.com/wiki/Bowers%27_Exploding_Array_Function

En hier is de uitwerking van $3\to4\to5\to2$

N.B. $\to 1$ en alles wat daarna komt (binnen de haakjes), valt weg!

$$3\to4\to5\to2 = 3\to4\to(3\to4\to4\to2)\to1 =$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to3\to2)\to1) =$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to2\to2)\to1)) =$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to1\to2)\to1))) =$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\to4))))$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to3^4))) =$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\to4\to(3\uparrow^{3^4}4))) =$$

$$= 3\to4\to(3\to4\to(3\uparrow^{3\uparrow^{3^4}4}4)) =$$

$$= 3\to4\to(3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3^4}4}4}4) = 3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3^4}4}4}4}4$$

$$3\to4\to5\to2 = 3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3\uparrow^{3^4}4}4}4}4$$

https://www.youtube.com/watch?v=oAUuHgu7FyM

Het kan ook een stuk formeler, zonder voort te borduren op Knuth's pijlnotatie:

Stel $p, q, a_1, \ldots, a_n$ zijn natuurlijke getallen en X en Y zijn verkorte schrijfwijzen voor pijlkettingen zoals $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$, dan evalueer je pijlkettingen als volgt:

1. $p = p$
2. $p \to q = p^q$
3. $X \to 1 = X$
4. $X \to 1 \to Y = X$
5. $X \to (p+1) \to (q+1) = X \to (X \to p \to (q+1)) \to q$

Wat gebeurt er in regel 5 (de formele variant van regel 3 in Conway's wat informelere uitleg): In de ketting vervang je de voorlaatste schakel $(p+1)$ door de hele ketting maar in die ketting heb je $(p+1)$ met 1 verminderd. Bovendien verminder je de laatste term met 1.
Regel 5 uitwerkend voor p resp. 1,2,3,…

$$X \to 2 \to (q+1) = X \to (X \to 1 \to (q+1)) \to q = X \to (X) \to q$$

$$X \to 3 \to (q+1) = X \to (X \to 2 \to (q+1)) \to q = X \to (X \to (X) \to q) \to q$$

$$X \to 4 \to (q+1) = X \to (X \to 3 \to (q+1)) \to q = X \to (X \to (X \to (X) \to q) \to q) \to q$$

Let ook op die laatste (X) tussen haakjes, eerst die uitwerken dus!

Bewijzen dat voor een 3-ketting geldt: $p \to q \to r = p \uparrow^r q$ in de pijlomhoognotatie is een (leuke) oefening.

5. De Snel Stijgende Hiërarchie

Nu we een beetje warm gedraaid zijn kunnen we aan het eigenlijke grote werk beginnen. We doen dat via een veel verder reikende en tegelijk ook zeer systematische methodiek om grote getallen te genereren: de Snel Stijgende Hiërarchie (Fast Growing Hierarchy, FGH). Deze hiërarchie kan ook prima gebruikt worden om andere grote getallen en functies en notatiesystemen voor grote getallen in te schalen en zo ook met elkaar te vergelijken. Wij kiezen voor de operatorvariant (dus in termen van bewerkingen, met dank aan N.J. Wildberger) in plaats van de (overigens wel meer gangbare) functie-variant. (Voor liefhebbers staat die als extraatje in de bijlagen.)

https://www.youtube.com/watch?v=wPEYoW0Mj1U
https://www.youtube.com/watch?v=Wv65xhrJ0zc
https://www.youtube.com/watch?v=LJR24_Povzw

> In de oorspronkelijke FGH worden steeds sneller stijgende functies gedefinieerd. Deze lopen niet helemaal gelijk op met onze bekende bewerkingen. Naast het feit dat we het begrip functie en het werken ermee kunnen vermijden, een extra reden om bewerkingen (operatoren) te gebruiken als constructie-elementen voor onze hiërarchie, waarvan de eenvoudigste iedereen kent zoals optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen. Voordeel is dat je zelfs niets van functies hoeft te weten!

We beginnen onze snel stijgende hiërarchie van bewerkingen met

$m + n$ (optellen, herhaald 1 erbij)

$m \cdot n$ (vermenigvuldigen, herhaald optellen)

m^n (machtsverheffen, herhaald vermenigvuldigen: $m \cdot m \cdot m \cdot m \ldots. m$ (n keer m))

$m \square n$ (tetreren, herhaald machtsverheffen: $m^{m^{m^{\cdot^{m}}}}$ (n keer m))

$m⌂n$ (penteren, herhaald tetreren: $m\square\ m\square\ m\square \ldots\ldots\ m\square m$ (n keer m))

….

etc.

Een simpel voorbeeld (kleine getallen als invoer) om te laten zien wat tetreren en penteren doet:

$$3\square 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987$$

$$3 ⌂ 3 = 3\square 3\square 3 = 3\square 3^{3^3} = 3\square 7.625.597.484.987 = 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$$ (7.625.597.484.987 3’en!)

5.1. Een eindeloze rij van operatoren

Natuurlijk gaan we niet telkens een ander symbool zoeken voor een bewerking, we gaan ze gewoon nummeren:

Optellen wordt	$\otimes_1$
Vermenigvuldigen wordt	$\otimes_2$
Machtsverheffen wordt	$\otimes_3$
Tetreren wordt	$\otimes_4$
Penteren wordt	$\otimes_5$
Etc.	

Tot iemand met een betere naam komt spreek ik zo'n operator uit als

$\otimes_1$ op een, $\otimes_2$ op twee, …., $\otimes_k$ op "*k*"

We definiëren eerst een notatie voor deze bewerkingen: $m \otimes_k n$ met *k* als index voor de bewerking, "*m*" noemen we het grondtal en "*n*" het argument. Het argument wordt soms ook exponent genoemd, naar analogie met machtsverheffen. Optellen ($k = 1$), vermenigvuldigen ($k = 2$), machtsverheffen ($k = 3$), tetreren ($k = 4$) en zo verder.

$$m \otimes_{k+1} n = m \otimes_k m \otimes_k \dots \dots m \otimes_k m \quad \text{(met } n\ m\text{'en)}$$

We kunnen $m \otimes_k n$ ook recursief definiëren. ($k, m, n \in \mathbb{N}$)

1. $m \otimes_1 n = m + n$
2. $m \otimes_{k+1} 1 = m$
3. $m \otimes_{k+1} (n + 1) = m \otimes_k (m \otimes_{k+1} n)$

Je ziet dat $n + 1$ in n stappen vermindert tot 1 maar voor de laatste term geldt $\otimes_{k+1} 1 = m$, dus uiteindelijk krijgen we een reeks van *n m*'en gescheiden door operatoren met een index 1 lager dan de oorspronkelijke. Net zoals we dat onze hele leven al gewend zijn met vermenigvuldigen en machtsverheffen: $m.n = m + m + \cdots. +m$ (met *n m*'en) en $m^n = m.m.m \dots. m$ (ook met *n m*'en). Check zelf dat dit klopt voor tetreren.

Als we b.v. $4 \otimes_4 4$ willen uitrekenen passen we eerst herhaald (3) toe.

$4 \otimes_4 4 = 4 \otimes_3 (4 \otimes_4 3) = 4 \otimes_3 \big(4 \otimes_3 (4 \otimes_4 2)\big) =$

$4 \otimes_3 \Big(4 \otimes_3 \big(4 \otimes_3 (4 \otimes_4 1)\big)\Big) =$

$= 4 \otimes_3 \big(4 \otimes_3 (4 \otimes_3 4)\big) = 4^{4^{4^4}}$

Voor $4 \otimes_5 4$ wordt het:

$4 \otimes_5 4 = 4 \otimes_4 (4 \otimes_5 3) = 4 \otimes_4 \big(4 \otimes_4 (4 \otimes_5 2)\big) =$

$4 \otimes_4 \Big(4 \otimes_4 \big(4 \otimes_4 (4 \otimes_5 1)\big)\Big) = 4 \otimes_4 \big(4 \otimes_4 (4 \otimes_4 4)\big) = 4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}\Big\}\, 4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}\Big\}\, 4^{4^{4^4}}\ \Big\} 4$

We hebben nu onze reeks van opeenvolgende operatoren: $\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3, \otimes_4, \otimes_5, \ldots..$ voor alle natuurlijke getallen k

Als we zouden willen kunnen we deze bewerkingen ook eenvoudig in een functievorm gieten: $g_k(m,n) = m \otimes_k n$ en zo $g_4(5,4) = 5 \otimes_4 4 = 5^{5^{5^5}}$.

Bijna 100 jaar geleden deed Wilhelm Ackermann ("leerling" van Hilbert) dat al met zijn "Ackermann" functie, maar dan om heel andere redenen. Hij zocht naar speciale recursieve functies. Tegenwoordig kom je de Ackermann functie meestal tegen in relatie met snel stijgende functies.

$\varphi(m,n,0) = m + n$

$\varphi(m,n,1) = m \cdot n$

$\varphi(m,n,2) = m^n$

$\varphi(m,0,k) = m$ voor $k > 2$

$\varphi(m,n,k) = \varphi(m, \varphi(m,n-1,k), k-1)$ voor $k > 2$ en $n > 0$

Als we willen kunnen we het aantal argumenten van zo'n functie verminderen, door te definiëren: $f_k(n) = \varphi(n,n,k)$ á la Ackermann of
$f_k(n) = g_k(n,n) = n \otimes_k n$ in onze eigen notatie.

Nog een stap verder: $A(n) = g_n(n,n) = n \otimes_n n$.

Schrijf zelf $f_5(5)$ uit.

Laten we in $m \otimes_k n$ eens wat getallen stoppen en voor het gemak $m = 3$ nemen, dan

$3 \otimes_k n$	1	2	3	4	5	….
1	4	5	6	7	7	….
2	3	6	9	12	15	….
3	3	9	27	81	243	….
4	3	27	3^{3^3} $\approx 8.10^{12}$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}4$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}5$	….
5	3	$3^{\cdot^{\cdot^{3}}}\}3$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}3^{\cdot^{\cdot^{3}}}\}3$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}3^{3^3}\}3$	$3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}\ 3^{3^3}\}3$	….
….	….	….	….	….	….	….

Explosief, of niet?

Laten we eens kijken hoe getallen zich ontwikkelen voor nog hogere bewerkingen zoals $\otimes_6, \otimes_7$, ... En verder. Zie je al een structuur ontstaan in het "roze" blokje?

Voor $m \otimes_4 n$ is het patroon $m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}n$ (een machttoren n-hoog).

Voor $m \otimes_5 n$ is het patroon $m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\} \ldots\ldots\ldots..m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m$ (een reeks van n machttorens lang, reken de laatste m ook als machttoren 1-hoog)

Want $m \otimes_5 n = m \otimes_4 m \otimes_4 m \ldots\ldots m \otimes_4 m$ (n m'en) =

$$m \otimes_4 (m \otimes_4 m \ldots\ldots m \otimes_4 m) = m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}(m \otimes_4 m \ldots\ldots m \otimes_4 m)$$

(met 1 toren en tussen de haakjes $n-1$ m'en)

$$=m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}(m \otimes_4 m \ldots\ldots m \otimes_4 m)$$

(met 2 torens en tussen de haakjes $n-2$ m'en) en zo verder tot

$m \otimes_5 n = m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\} \ldots\ldots..m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}\}m$ (met n torens en niets meer tussen haakjes).

Zie je dat het klopt voor 3 $\otimes_5$ 4 en 3 $\otimes_5$ 5?

Laten we voor het gemak zo'n machtstoren noteren als / .

Dan schrijven we dus $m \otimes_5 n =/\}/\} \ldots\ldots/\}m$

(met n machttorens: $(n-1)/$ en 1 m (toren 1 hoog) aan het eind).

Hoe gaat het nu verder?

Laten we rustig beginnen met $m \otimes_6 1$. Dat is simpel want m.

Dan naar $m \otimes_6 2 = m \otimes_5 m =/\}/\} \ldots.\}/\}m$ (met m machtorens (/,m).

Maar nu: $m \otimes_6 3 = m \otimes_5 m \otimes_5 m = m \otimes_5 (/\}/\} \ldots.\}/\}m) = /\}/\} \ldots\ldots/\}m$ (met $/\}/\} \ldots\ldots/\}m$ machttorens).

Het is een beetje behelpen maar dat gaat er ongeveer zo uitzien:

$$m \otimes_6 3 = \begin{array}{cc} \underbrace{/\}/\} \ldots.\}/\}m} & 3 \\ \underbrace{/\}/\} \ldots.\}/\}m} & 2 \\ m & 1 \end{array}$$

$m \otimes_6 n$ wordt dan

$$\left.\begin{array}{c} \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \ldots.. \\ \underbrace{/\}\ldots.\}/\}m}} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ m \end{array}\right\} n$$

$m \otimes_7 n$ wordt vervolgens

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c} \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \ldots.. \\ \underbrace{/\}\ldots.\}/\}m}} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ m \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \ldots.. \\ \underbrace{/\}\ldots.\}/\}m}} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ m \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ \ldots.. \\ \underbrace{/\}\ldots.\}/\}m}} \\ \underbrace{/\}/\}\ldots.\}/\}m} \\ m \end{array}\right\} m}_{n}$$

Enzovoort, enzovoort…. Telkens weer afwisselend naar boven of naar links uitbreiden (afhankelijk waar de n staat).

Voor we verder gaan is het goed om even stil te staan bij de enormiteit van deze getallen! We waren ons besef al kwijt bij $10^{10^{10^{10}}}$, laat staan dat we in bovenstaande schets voor *m* en *n* 10 substitueren. Loop voor je zelf het traject is na om uiteindelijk bij die allerlaatste immense toren van 10’en uit te komen.

Het is trouwens ook goed om te kijken naar het effect van m, n en k op de groei van het getal. Wat gebeurt er als we een van deze parameters ophogen?

5.2. Effect op groei van de verschillende variabelen

Je hebt inmiddels wel in de gaten dat de index *k* ophogen in $m \otimes_k n$ het grootste effect heeft. Je ziet dat ook aan de matrix van *m*'en die bloksgewijs (blok naar rechts erbij, blok naar beneden erbij enz.) uitbreidt, terwijl het argument *n* met 1 ophogen er alleen maar een kolom of rij aan toevoegt. De bijdrage van het grondtal *m* is nog kleiner. Je kunt wat gevoel voor het effect van die verschillende wijzigingen krijgen als je voor $m \otimes_k n$ resp. $3 \otimes_3 3$ en $4 \otimes_4 4$ neemt en telkens een van de parameters met 1 ophoogt. Je zult niet alles kunnen uitrekenen maar je zult wel zien wat het effect is.
In voorbeelden zullen we voor *m* en *n* meestal kleine getallen (3 of 4) gebruiken. Het getal 2 is een apart geval, zeker als je voor *m* en *n* allebei 2 neemt (waarom?))

Heb je gezien dat onze bewerkingen $\otimes_3, \otimes_4, \otimes_5, \ldots..$ overeenkomen met Knuth's pijlnotatie $\uparrow, \uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow\uparrow, \ldots\ldots$. Het enige verschil is dat de eerste pijl al meteen voor machtsverheffen staat, terwijl onze operatoren met optellen beginnen. Als we gewild hadden, hadden we in overeenstemming met de axioma's van Peano er nog een operator $\otimes_0$ aan kunnen toevoegen (0 eventueel ook te lezen als O voor opvolger) met $m \otimes_0 1 = Sm = m + 1$. In feite heb je de tweede parameter n niet nodig, want de opvolger hangt alleen af van m. Je zou ook kunnen zeggen: $m \otimes_0 n = Sm = m + 1$.
Geldt nu ook nog $m \otimes_{k+1} (n + 1) = m \otimes_k (m \otimes_{k+1} n)$ voor $k = 0$ of moeten we daar ook wat aanpassen om het kloppend te houden met optellen?

Misschien toch esthetischer om $\otimes_1$ te beginnen?

5.3. Nog sneller stijgende varianten

Met onze geïndexeerde operator kunnen we gemakkelijk een nieuwe bewerking definiëren die elke bewerking $\otimes_k$ (voor alle *k*!) overstijgt. In eerste instantie lijkt dat onmogelijk maar dat is het niet.

Laten we eens kijken naar onze tabel van bewerkingen voor oplopende k en n.

k \ n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**….**	**….**
1	$m \otimes_1 1$	$m \otimes_1 2$	$m \otimes_1 3$	$m \otimes_1 4$	$m \otimes_1 5$	….	….
2	$m \otimes_2 1$	$m \otimes_2 2$	$m \otimes_2 3$	$m \otimes_2 4$	$m \otimes_2 5$	….	….
3	$m \otimes_3 1$	$m \otimes_3 2$	$m \otimes_3 3$	$m \otimes_3 4$	$m \otimes_3 5$	….	….
4	$m \otimes_4 1$	$m \otimes_4 2$	$m \otimes_4 3$	$m \otimes_4 4$	$m \otimes_4 5$	….	….
5	$m \otimes_5 1$	$m \otimes_5 2$	$m \otimes_5 3$	$m \otimes_5 4$	$m \otimes_5 5$	….	….
….	….	….	….	….	….	$m \otimes_6 6$	….
….	….	….	….	….	….	….	…

Als we nu een nieuwe bewerking definiëren $\otimes_{di}$ (di van diagonaal) met $m \otimes_{di} n = m \otimes_n n$ dan zien we dat deze bewerking iedere bewerking $\otimes_k$ gaat overtreffen voor welke k dan ook. Neem als voorbeeld $k = 4$, voor n=2,3,4 is $\otimes_k \geq \otimes_{di}$ maar daarna is voor alle $n \geq 5$ $\otimes_{di} \geq \otimes_4$!
Dus voor welke *k* dan ook $m \otimes_{di} n = m \otimes_n n \geq m \otimes_k n$ zo gauw $n \geq k.$

Dat diagonaliseren gaan we nog vaker doen, iedere keer wanneer we in reeks verzeild raken waarin we maar door kunnen blijven tellen. We zouden ze *di1, di2* etc. kunnen noemen maar om redenen die van lieverlee duidelijk worden kiezen we daarbij voor de limietordinaalgetallen van Cantor. https://nl.wikipedia.org/wiki/Ordinaalgetal

Deze eerste diagonalisatie krijgt "ω" als index mee. We definiëren $\otimes_\omega$ als

$$m \otimes_\omega n = m \otimes_n n$$

Dit is dus niet de "oneindigste" bewerking van een oneindig lange reeks maar een bewerking die opgebouwd is uit goed gedefinieerde (en eindige) componenten uit de bewerkingen die we al hebben.

Ordinaalgetallen zijn een uitbreiding van de natuurlijke getallen waarbij het vooral om de volgorde gaat. Dat volgt al uit de manier waarop deze ordinaalgetallen gevormd worden. Het begint allemaal met de lege verzameling ofwel het getal 0. En vervolgens wordt ieder volgend ordinaalgetal gedefinieerd door de verzameling die al zijn voorgangers bevat.

0 = ∅ (de lege verzameling)
1 = {0} (de verzameling die 0 bevat)
2 = {0,1}
3 = {0,1,2}
…..
…
met als limietordinaal:
$\omega = \{0,1,2,3,4,5 \ldots\ldots\ldots\ldots..\}$ (de verzameling van alle natuurlijke getallen)
$\omega + 1 = \{0,1,2,3,4,5 \ldots\ldots, \{0,1,2,3,4,5 \ldots\ldots\ldots\ldots..\}\}$
en vervolgens, $\omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ met als limietordinaal $\omega.2$, vervolgens $\omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \ldots\ldots\ldots....$ afgesloten met $\omega.3$.

En zo gaat het maar door, na $\omega.3$ komt $\omega.4,\ldots$ komt ω^2 , ω^3 , en alle polynomen met ω, eindigend met ω^ω, verder met $\omega^\omega + 1$, etc. We gaan niet meer in detail het rijtje af maar via $\omega^\omega + \omega, \ldots., \omega^\omega + \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, ..$ sluiten wij hier af met $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}$ een oneindige toren van ω's, in de theorie van de ordinaalgetallennoemen we die toren ϵ_0.
Na $\epsilon_0$komt natuurlijk gewoon weer $\epsilon_0 + 1$ etc.

Voorbeeld: $3 \otimes_\omega 4 = 3 \otimes_4 4 = 3^{3^{3^3}}$ maar ook $3 \otimes_\omega 100 = 3 \otimes_{100} 100$ en dat getal is totaal andere koek! Wat wordt nu de bewerking na $\otimes_\omega$? We gaan gewoon op de bekende manier verder en hogen de index 1 op: $\otimes_{\omega+1}$, $\otimes_{\omega+2}$,$\otimes_{\omega+3}$, ...Voor we de reeks verder "afmaken" laten we eens een paar getallen "berekenen":

$$3 \otimes_{\omega+1} 1 = 3$$
$$3 \otimes_{\omega+1} 2 = 3 \otimes_\omega (3 \otimes_{\omega+1} 1) = 3 \otimes_\omega 3 = 3 \otimes_3 3 = 3^3 = 27$$
$$3 \otimes_{\omega+1} 3 = 3 \otimes_\omega (3 \otimes_{\omega+1} 2) = 3 \otimes_\omega 27 = 3 \otimes_{27} 27$$
$$3 \otimes_{\omega+1} 4 = 3 \otimes_\omega (3 \otimes_{\omega+1} 3) = 3 \otimes_\omega (3 \otimes_{27} 27) =$$
$$= \quad 3 \otimes_{(3 \otimes_{27} 27)} (3 \otimes_{27} 27)$$

Zie je wat er gebeurt? De uitkomst van de vorige bewerking wordt niet alleen het nieuwe argument van een hogere bewerking maar wordt ook de ***nieuwe index***. En zoals we gezien hebben heeft dat de grootste invloed op de toename van de grootte van het getal. We schuiven in de matrix niet alleen een enorm eind naar rechts maar ook nog eens eenzelfde eind naar beneden voor een nog extremer effect op de grootte van het uiteindelijk getal.
En dit is nog maar het begin. We zien wat er gebeurt als we n ophogen. Laten we de index eens ophogen en $3 \otimes_{\omega+2} 2$ proberen uit te rekenen:

$$3 \otimes_{\omega+2} 2 = 3 \otimes_{\omega+1} (3 \otimes_{\omega+2} 1) = 3 \otimes_{\omega+1} 3 = 3 \otimes_{27} 27$$

en vervolgens

$$3 \otimes_{\omega+2} 3 = 3 \otimes_{\omega+1} (3 \otimes_{\omega+2} 2) = 3 \otimes_{\omega+1} (3 \otimes_{27} 27) =$$
$$= 3 \otimes_\omega (3 \otimes_{\omega+1} ((3 \otimes_{27} 27) - 1) =$$
$$= 3 \otimes_\omega 3 \otimes_\omega 3 \otimes_\omega \ldots\ldots .3 \otimes_\omega 3 \quad \text{met } (3 \otimes_{27} 27) \otimes_\omega\text{'s!}$$

In iedere ω moet terugwerkend een steeds idioter groter wordend getal in gesubstitueerd worden.

Waag je zelf eens aan $3 \otimes_{\omega.2+1} 2$

Over $3 \otimes_{\omega^2+1} 2$ zullen we het maar niet hebben, want bedenk dat $\omega^2 = \omega.\omega$ en dat je eerst in één ω iets substitueert, wat een $\omega.a$ term oplevert die je eerst verder moet afbouwen via $\omega.(a-1)$, $\omega.(a-2)$ etc naar ω …………

En dan zijn we nog steeds maar amper begonnen.

Je komt onder andere langs $3 \otimes_{\omega^6.5+\omega^4.2+\omega^2.99+11} 3$ en $3 \otimes_{\omega^{\omega^\omega}.3+\omega^6.5} 3$ en…
Je bent dus nog even bezig voor je bij $3 \otimes_{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} 3$ oftewel $3 \otimes_{\epsilon_0} 3$ bent.

Op het moment dat je bij een limietordinaal bent aangekomen en gaat substitueren is het goed je te realiseren waar die ordinaal precies de limiet van is. In ons betoog zijn we er vrij soepeltjes overheen gegaan maar een voorbeeld maakt veel duidelijk. Laten we meteen maar bij de laatste limietordinaal die we hier behandelen beginnen: $3 \otimes_{\epsilon_0} 3$

ϵ_0 is de verkorte schrijfwijze voor $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ en de limiet van de reeks ω, ω^ω , ω^{ω^ω}, etc.

$3 \otimes_{\epsilon_0} 3$ wordt dus eerst $3 \otimes_{\omega^{\omega^\omega}} 3$, vervolgens 3 weer substitueren in de bovenste ω levert $3 \otimes_{\omega^{\omega^3}} 3$, wordt $3 \otimes_{\omega^{\omega^2.\omega}} 3 = 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.3}} 3 = 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega^2}} 3 = 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.\omega}} 3$
$= 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.3}} 3 = 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+\omega}} 3 = 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+3}} 3 =$

$= 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+2}} 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+2}} 3 =$
$= 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+2}} (3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+1}} 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+1}} 3) =$

$= 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+2}} (3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2+1}} (3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2}} 3 \otimes_{\omega^{\omega^2.2+\omega.2}} 3) = \ldots\ldots\ldots.$

Ik hoop dat de systematiek je een beetje duidelijk is. Het duurt nog even voor je in de laatste operator alle ω's hebt weggewerkt is de keten nog langer geworden. Je kunt nu beginnen je in die keten naar voren te werken maar met ieder stapje naar voren neemt het getal dat je in ω moet substitueren zo explosief toe dat de inflatie na de oerknal op een afgeknepen kuchje lijkt. Over het getal dat er uiteindelijk uitkomt zullen we het maar niet hebben.

En ook al stoppen wij bij ϵ_0, je kunt via $\otimes_{\epsilon_0+1}$ "gewoon" weer door. Dat zul je op eigen gelegenheid moeten doen. Op internet is genoeg te vinden om je verder te helpen. Maar het wordt er niet eenvoudiger op. Wel groter ….

5.4. Bekende getallen en hun plek in de hiërarchie

Bijna alle grote getallen waar we onze reis mee begonnen zijn kleiner dan $3 \otimes_5 4$, alleen het getal van Graham staat een behoorlijk eind verder in de rij, pas $3 \otimes_{\omega+1} (65) >$ getal van Graham.

Knuth's pijlnotatie vindt haar equivalent helemaal in de eerste iteratiereeks, want we hadden al gezien dat $m \otimes_k n = m \uparrow^k n$ en de getallen die we in Conways notatie kunnen schrijven vinden we tussen $m \otimes_\omega n$ en $m \otimes_{\omega^2} n$.

6. Twee Grote-Getallen-Generatoren

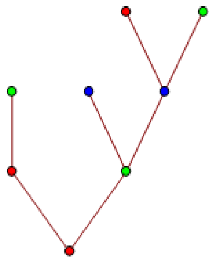
Voor we gaan afsluiten wil ik je nog kennis laten maken met twee bijzondere functies die grote getallen genereren. Ik zal niet al te diep in gaan op de wiskunde erachter. We gaan gewoon even de sfeer proeven.

De eerste is TREE(3) en de tweede is de Goodsteinrij.

6.1. TREE (3)

TREE (3) en in het algemeen TREE (n) is een spel met “bomen” (uit de grafentheorie) waarbij het de bedoeling is een zo groot mogelijk bos te maken van verschillende bomen gebruik makend van ten hoogste 3 (of n) verschillende “zaden” (knopen).

Voorbeeld van zo’n boom (met 3 verschillende zaden, weergegeven door de drie verschillende kleuren) is:



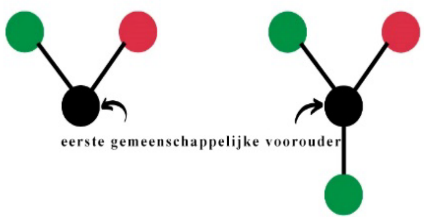
Het doel van het spel is een zo lang mogelijke reeks bomen te maken waarbij je je moet houden aan de twee volgende regels:

Regel 1: De eerste boom mag niet meer dan één “zaad” (of knoop) tellen, de tweede hoogstens 2, de derde hoogstens 3 enz. Boom nr. k telt dus k of minder zaden (knopen).

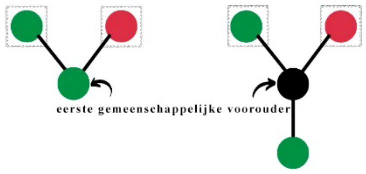
Regel 2. Het spel stopt wanneer je een boom maakt waarin een al eerder gemaakte boom is ingebed.

En “ingebed” houdt in dat een eerder gemaakte boom (met zaden en structuur van verbindingen) voorkomt als onderdeel in een latere boom op zo’n manier dat een gemeenschappelijke voorouder in de eerste boom correspondeert met de gemeenschappelijke voorouder in de latere boom. Een paar voorbeelden maken veel duidelijk:

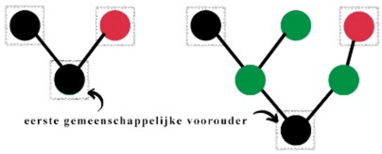
In het eerste voorbeeld zie je de eerste boom exact terug in de tweede. De eerste gemeenschappelijke voorouder in de eerste boom is zwart en dat is ook de eerste gemeenschappelijke voorouder in de tweede boom.



In het tweede voorbeeld zie we dat de kleuren van de eerste gemeenschappelijke voorouders NIET gelijk zijn. Boom 1 is dus NIET ingebed in boom 2.



In het derde voorbeeld liggen er weliswaar wat groene zaden tussen maar in beide gevallen is de eerste GEMEENSCHAPPELIJKE voorouder zwart. Dus heet boom 1 toch ingebed in boom2!



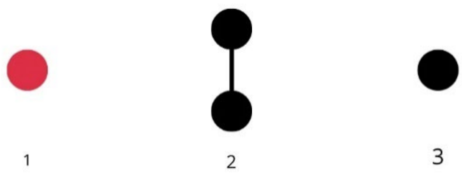
Maak nu dus een zo groot mogelijk "bos" te maken.

Met een type zaadje kom je niet ver. Je kunt één boom maken met precies een zaadje. Iedere volgende boom moet weer zo'n zelfde type zaadje bevatten (er is niets anders) en omdat er geen gemeenschappelijke voorouders zijn is dat punt niet aan de orde. De maximale lengte van het bos is dus 1!

TREE(1) = 1

Wat als je twee kleuren zaden hebt. Misschien denkt je dat het dan met twee bomen afgelopen is, de eerste met een rood zaadje en de tweede met een zwart. En daarna kun je niks anders maken dan een boom waar of de eerste of de tweede in is ingebed.

Maar dat kan wel. Kijk maar:
Denk aan regel 1 dat het aantal zaden in een boom niet groter mag zijn dan het volgnummer van de boom. Boom nr. 2 mag dus 2 zaden bevatten, alleen geen rode. En boom 2 is niet ingebed in boom 3.



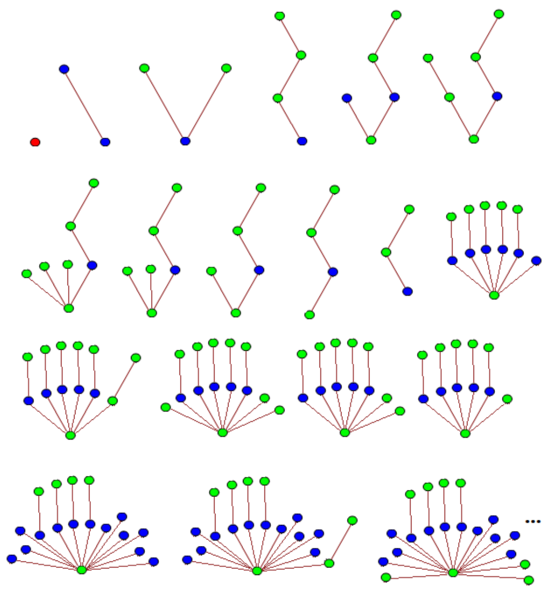
Maar hiermee zijn onze mogelijkheden wel uitgeput.

TREE(2) = 3

Hoe groot is nu TREE(3)?
Wil je een gokje wagen?

Hiernaast heb je al rijtje van 19 staan en bewezen is dat TREE(n) voor alle n eindig is, dus ook voor TREE(3)!

Maar aangezien ons verhaal gaat over grote getallen zal TREE(3) echt wel veel en veel groter zijn dan 19. En dat is juist!
Het is groter dan welk getal we tot nog toe zijn tegengekomen. Het getal van Graham (G_{64}) is er een dwerg bij.



Een precieze bovengrens is niet te geven, wel zijn er verschillende ondergrenzen in omloop in notaties die we hier niet behandeld hebben (ver voorbij $m \bigotimes_{\epsilon_0} n$) maar in onze notatie zouden we iets kunnen roepen in de trant van TREE(3) ≥ $G_{64} \bigotimes_{\epsilon_{0+1}} G_{64} =$ $G_{64} \bigotimes_{\epsilon_0} G_{64} \bigotimes_{\epsilon_0} G_{64} \ldots\ldots\ldots\ldots G_{64} \bigotimes_{\epsilon_0} G_{64}$ (met G_{64} keer G_{64}! En daarna graag eindeloos substitueren in enorme torens van $\omega's$.)

Nu we weten dat TREE(3) zo groot is wat denk je dan van $TREE(G_{64}) \bigotimes_{\epsilon_{0+1}} TREE(G_{64})$?

https://towardsdatascience.com/how-big-is-the-number-tree-3-61b901a29a2c
https://www.popularmechanics.com/science/math/a28725/number-tree3/

6.2. De Goodsteinrij

De Goodsteinrij vraagt ook wat inleiding. Ging het bij TREE(3) over grafen , bij de Goodsteinrij speelt de notatie van getallen een belangrijke rol, met name de basis van talstelsels, het grondtal g. Ons eigen talstelsel heeft 10 als grondtal. 123 is daarom ook te schrijven als de som van machten van 10: $(1 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + 3$.

We hadden het ook kunnen schrijven in een talstelsel met 3 als basis dan was het geworden:

$$123 = (1 \times 3^4) + (1 \times 3^3) + (1 \times 3^2) + (2 \times 3^1)$$

Je ziet dat er in deze uitdrukking getallen voorkomen die groter zijn dan 3, nl. 4. Ook die werken we nog weg door ook die om te schrijven (we noemen dat de super-g-notatie (hereditary base)). Zo omgeschreven krijgen we

$$123 = 3^{3+1} + 3^3 + 3^2 + (2 \times 3)$$

De Goodsteinrij van een getal n kunnen we nu als volgt definiëren:

1. Het getal zelf is de eerste van de reeks
2. Schrijf het getal in super-g-notatie, met g=2 .
3. Verhoog overal het grondtal met 1. Trek uiteindelijk 1 af van het zo verkregen getal.
4. Dat wordt het volgende getal in de rij.
5. Stop als 0, anders ga door met regel 3. met het nieuwe grondtal.

Ook hier maakt een voorbeeld veel duidelijk:

Nr in de rij	***n***	**g**
1	266 $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$	2

2	2 443 . . . 886 (39 cijfers) $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$ $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$	3
3	3 323 . . . 681 (617 cijfers) $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$ $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$	4
4	(> 10 000 cijfers) $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$ $6^{6^{6+1}} + 6^{6+1} - 1$	5
..	……	..

Je ziet, de getallen in zo'n Goodsteinrij groeien ontzettend snel. En nu is de vraag, blijft zo'n Goodsteinrij maar groeien of bereikt ie ergens een maximum? In eerste instantie ben je geneigd te zeggen dat een Goodsteinrij maar blijft groeien en dat de optie "stop bij 0" nooit voorkomt, behalve bij hele kleine getalletjes zoals 1 of 2 of 3. Toch is dat niet waar. Het is zelfs zo dat iedere rij uiteindelijk eindigt bij 0. Al duurt het wel lang…..

Voor $n = 3$ levert de 5ᵉ stap 0 op (3 ($2^1 + 1$), 3 ($3^1 + 1 - 1$), 3 ($4^1 - 1$), 2, 1, 0)

$n = 4$ eindigt na $3.2^{402.653.211} - 3 \approx 3.10^{10^8}$ stappen!

Wanneer het voor 266 eindigt, ik heb geen idee maar uiteindelijk wint de 1 het.

Dat *iedere* Goodsteinrij op 0 eindigt is zo'n boude bewering, dat vraagt om uitleg. Voor die uitleg hebben we onze ordinaalgetallen weer nodig die we bij de FGH hebben leren kennen.

Laten we als voorbeeld de Goodsteinrij van 4 nemen. 266 mag ook maar dat wordt meer schrijfwerk, het principe blijft hetzelfde.

We gaan ieder element van de rij vervangen door een groter ordinaalgetal en zullen laten zien dat die rij van grotere ordinaalgetallen daalt en uiteindelijk 0 wordt. Aangezien onze Goodsteinrij element voor element kleiner is (in feite parallel loopt) moet die dus ook naar 0 gaan!
Dat grotere ordinaalgetal krijgen we door telkens g te vervangen door ω als volgt:

Rijnr	***n***	**g**	**Ordinaalgetal**
1	$4 = 2^2$	2	ω^ω
2	$26 = 3^3 - 1 = 2\cdot3^2 + 2\cdot3 + 2$	3	$\omega^2\cdot2 + \omega\cdot2 + 2$
3	$41 = 2\cdot4^2 + 2\cdot4 + 1$	4	$\omega^2\cdot2 + \omega\cdot2 + 1$
4	$60 = 2\cdot5^2 + 2\cdot5$	5	$\omega^2\cdot2 + \omega\cdot2$
5	$83 = 2\cdot6^2 + 2\cdot6 - 1 = 2\cdot6^2 + 6 + 5$	6	$\omega^2\cdot2 + \omega + 5$
6	$109 = 2\cdot7^2 + 7 + 4$	7	$\omega^2\cdot2 + \omega + 4$
…	…	..	…

Je ziet dat de rij ordinaalgetallen daalt en dat er, wanneer er aan het eind van de polynoom (veelterm zoals $\omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 2$) geen natuurlijk getal meer beschikbaar is, er een ω opgeofferd moet worden om er 1 vanaf te kunnen trekken, dat natuurlijke getal is kleiner dan g, want 1 minder. Die ω komt dus niet meer terug, vervolgens zijn er wel weer (g-1) stappen om 1 af te trekken, voordat de volgende ω aan de beurt is. g wordt al die tijd groter maar blijft eindig en als dan hele lange tijd ook de laatste ω verdwenen is, is het hele getal kleiner dan de dan geldende g geworden en kan eindelijk het grote aftellen naar 0 beginnen!

En het is natuurlijk duidelijk dan de lengte van de rij groter is dan het maximum van de rij!

Definiëren we $G(n)$ als de lengte van de Goodsteinrij van n dan is $G(n)$ vergelijkbaar met $n \otimes_{\epsilon_0} n.$ Volgens de geleerden in feite net iets kleiner maar wel groter dan $n \otimes_{\alpha} n$ voor alle $\alpha < \epsilon_0$.

https://risingentropy.com/the-mindblowing-goodstein-sequences/
https://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s_theorem

7. Slot

7.1. Samenvatting

We zijn begonnen met “grote getallen” die groot lijken in verhouding met de mens als maat der dingen en als sterrenkundigen staan we dan ons mannetje of vrouwtje. Toch bleek al gauw dat we op de ladder van echte grote getallen zelfs niet op de onderste tree stonden!

Via de notatie van Knuth leerden we op een simpele manier extreem grote getallen beschrijven. De pijlnotatie was een inzichtelijke methode om ons recept van herhalen, herhalen, herhalen eindeloos voort te zetten. Een recept dat we al kenden van onze lagere school: vermenigvuldigen is herhaald optellen en machtsverheffen is weer herhaald vermenigvuldigen.

De pijlnotatie generaliseert dat proces van herhalen:

$a\uparrow^{n+1}b = a\uparrow^{n}a\uparrow^{n}a\uparrow^{n}a \ldots\uparrow^{n}a$ (met b a’s) , met aan de basis voor $n = 0$

$a\uparrow b = a^{b} = a\cdot a\cdot a \ldots\ldots a\cdot a$ (met b a’s) ofwel machtsverheffen.

Voor een klein aantal pijlen leverde dat voor ons gevoel al behoorlijk grote getallen op

$3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow(3^{3^{3}}) =$

$= 3\uparrow\uparrow(7.625.597.484.987) = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$ (toren van 7.625.597.484.987 3’en hoog)

maar toch is deze notatie niet in staat om echte grote getallen (lees wat hier staat als je het getal hierboven ziet!!!) soepel weer te geven zoals b.v. het getal van Graham.

De pijlketting notatie van Conway hielp ons verder op weg met een wat ingewikkelder constructie maar het getal van Graham werd in deze notatie weer behapbaar:

$3\rightarrow 3\rightarrow 65\rightarrow 2$

Gezien wat je met de Conway notatie kunt doen is Graham gereduceerd tot een “kleine jongen”.

Conway bouwt voort op de pijlnotatie van Knuth met als belangrijkste regels

1) $a\rightarrow b\rightarrow c = a\uparrow^{c} b = a\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow b$ (met c omhoogpijlen)
2) $a\rightarrow b\rightarrow \ldots \rightarrow x\rightarrow y \rightarrow 1$ is een synoniem voor $a\rightarrow b\rightarrow \ldots \rightarrow x\rightarrow y$
3) En $a\rightarrow \ldots x\rightarrow y \rightarrow (z+1) =$
   a) $a\rightarrow \ldots x$ als $y = 1$
   b) $a\rightarrow \ldots x\rightarrow(a\rightarrow \ldots x)\rightarrow z$ als $y = 2$
   c) $a\rightarrow \ldots x\rightarrow(a\rightarrow \ldots x\rightarrow(a\rightarrow \ldots x)\rightarrow z)\rightarrow z$ als $y = 3$
   Denk eraan: eerst haakjes uitwerken!

De laatste regel is natuurlijk de grote klapper!

Deze notaties zijn in feite niet meer dan vingeroefeningen voor het eigenlijke grote werk, "de snel stijgende hiërarchie" waarin het proces van herhalen, herhalen, herhalen van het begin af aan consequent wordt gebruikt om steeds zwaardere bewerkingen te definiëren:

$$m \otimes_{k+1} n = m \otimes_k m \otimes_k \dots \dots m \otimes_k m \quad \text{(met } n \text{ } m\text{'en)}$$

$\otimes_1$ staat voor optellen, $\otimes_2$ voor vermenigvuldigen, $\otimes_3$ voor machtsverheffen, $\otimes_4$ voor tetreren en zo voort. Iedere stap verder bestaat uit een aantal herhalingen van de vorige bewerking. En al lijkt dat heel veel op de pijlen van Knuth , door de diagonalisatietruc (afgekeken van Cantor, net als de indexering met limietordinalen)

$$m \otimes_{di} n = m \otimes_\omega n = m \otimes_n n$$

zagen we kans dat herhaalproces te overstijgen en op een hoger niveau voort te zetten met een nieuwe serie van herhalen, herhalen. Iedere keer als we in een "eindeloos herhalen" dreigden vast te lopen kon een nieuwe diagonalisatiestap ons weer verder helpen. Het nieuwe devies werd nu: (recursief) itereren en diagonaliseren.
Deze stappen lopen parallel aan de ordinaalgetallen waarbij de diagonalisatiestap telkens gekoppeld wordt aan een limietordinaal. Via ω, $\omega + 1$ en vervolgens, $\omega + 2, \omega + 3, \dots \dots$ met als limietordinaal $\omega.2$, vervolgens $\omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \dots \omega.3, \omega.4, \dots\ \omega^2$, ω^3 , eindigend met ω^ω, verder met $\omega^\omega + 1$, etc. en via $\omega^\omega + \omega, \dots$, $\omega^\omega + \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, ..$ naar $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ een oneindige toren van ω's: ϵ_0. Na ϵ_0 komt natuurlijk gewoon weer $\epsilon_0 + 1$ etc.

Een iteratiestap zorgt al voor een enorme toename van het argument maar als die enorme getallen vervolgens opduiken in de index zorgt dat voor een groei waarbij de vorige toename in het niet verdwijnt.

De getallen zijn inmiddels allang onvoorstelbaar groot geworden. Wij stappen bij $\epsilon_0 + 1$ van de ladder af, al gaat de hiërarchie gewoon door!

Ter afsluiting lieten we nog twee simpele "grote-getallengeneratoren" zien met twee verschillende, maar verrassende effecten.
TREE(n) is een bijzondere reeks grafen met een paar simpele restricties die voor TREE(1) en TREE(2) kleine getallen oplevert maar voor TREE(3) explodeert. De reeks is (bewezen) eindig maar levert een getal op dat groter is dan alle getallen die we in ons hele betoog zijn tegengekomen.
De andere "generator" is de Goodsteinrij die ook op een bijzondere manier geconstrueerd wordt. Ieder nieuw getal in de rij wordt opgebouwd op basis van twee componenten, een extreem snel stijgende (exponenten in machtstermen nemen toe) en een zwak dalende (van het getal wordt vervolgens 1 afgetrokken). Al voor kleine natuurlijke begingetallen worden zo enorm grote getallen gegenereerd maar verrassend genoeg wint de (-1) het uiteindelijk toch en eindigt de rij met 0. De lengte van de rij, afhankelijk van het begingetal) stijgt sneller dan $\otimes_{\epsilon_0}$!

Er valt nog veel meer over grote getallen te melden. Niet alleen kun je de snel stijgende hiërarchie verder doorzetten maar we hebben ook van die grote-getallenwedstrijd die zo ludiek begon alleen maar het begin verteld en niet hoe de wedstrijd eindigde, dus ook niets gezegd over nog twee sneller stijgende functies dan TREE(n): de "Busy Beaver" functie die te

maken heeft met Turing Machines en Rayo's functie die uiteindelijk de wedstrijd won. De links helpen je om je daar verder in te verdiepen. Als je wilt natuurlijk.
https://googology.fandom.com/wiki/Busy_beaver_function
https://googology.fandom.com/wiki/Rayo%27s_number
https://en.wikipedia.org/wiki/Rayo%27s_number

7.2. Opmerkingen

In ons verhaal over grote getallen zijn we gewoon in het diepe gedoken en met een beperkte set aan wiskundig gereedschap hebben we getallen "geconstrueerd" zo groot dat we zelf niet meer het besef hebben hoe groot ze zijn.

Dus lijkt het me goed om er tot slot nog even met een helikopter-view naar te kijken, al moet je er wel heel hoog boven hangen om alles te kunnen overzien.

En eigenlijk kan dit niet. https://www.youtube.com/watch?v=Z8I68E7yZeY

Want we hebben geen overzicht. Het lijkt een beetje alsof we een overzicht over Nederland willen geven op basis van een paar grassprietjes die we "gezien" hebben. We "kennen" namelijk ontzettend weinig van die grote getallen. Alle getallen die we tot nu toe zijn tegengekomen zijn machten van een beperkt aantal grondtallen 2,3,4,5 en 10. En ook die machttorens hebben een specifieke lengte (ook meestal een macht van datzelfde grondtal). Over alle getallen daartussen hebben we het hier niet gehad. Voor het gros (afgerond: allemaal!) van die getallen geldt dat ons heelal, opgedeeld in Planckblokjes met een cijfer per blokje, te klein is om die getallen te beschrijven. Zelfs het aantal heelallen dat je daarvoor nodig zou hebben om het wel te kunnen doen is te groot om in ons heelal te kunnen beschrijven. En je hoeft niet eens zo'n groot getal als bovengrens te nemen, denk bijvoorbeeld maar aan $3 \otimes_5 3 \;\; = 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (7.625.597.484.987 3'en!) en alle getallen daaronder. Om over $3 \otimes_{\omega+5} 3$ maar te zwijgen. Van geen van die getallen (enkele uitgezonderd) weten we iets. We weten niet of ze priem zijn, of even of volmaakt of een palindroom of een kwadraat of, of, of …..

Wat zei Ludwig Wittgenstein ook al weer:

"Wovon man nicht sprechen kann, darueber muss man schweigen."

Maar voor ik dat doe, toch nog een vraag: bestaan al die getallen echt?

Is $G_{64} \otimes_{\epsilon_0+G_{64}} G_{64}$ een getal dat "ergens is" of is het een verzameling symbolen waar we een "trukendoos" op los kunnen laten, zonder te kunnen zeggen waar het voor staat.

En mocht je denken dat $TREE(G_{64}) \otimes_{\epsilon_{0+TREE(G_{64})+1}} TREE(G_{64})$ een nog veel groter getal is, in het rijtje van de natuurlijke getallen staat het relatief gezien nog steeds vlak naast 1! Je weet nu zelf wel hoe je dat kunt laten zien.

> Kijken we naar het voortbrengingsproces van de natuurlijke getallen (0∈ℕ, en als n ∈ℕ dan ook Sn ∈ ℕ wat hetzelfde is als $(n + 1)$ ∈ ℕ) , wat rechtvaardigt dan de conclusie dat als je er telkens eentje bij kunt doen er oneindig veel natuurlijke getallen bestaan?
> Je begon met eindig veel natuurlijke getallen (eentje) en iedere keer als je er eentje bij doet heb je er weer eindig veel. Pas als je oneindig veel stappen kunt doen, maar ja, je begint bij stap één en dan telkens eentje erbij …….
> Geen wonder dat we in de wiskunde een axioma (aanname zonder bewijs) nodig hebben om het begrip "Oneindig" te introduceren.

Oneindig veel natuurlijke getallen worden er dan wel erg veel. Om over een oneindig groot heelal maar niet te spreken (weer vrij naar Wittgenstein).

8. Bijlagen

8.1. Links

https://sites.google.com/site/largenumbers/home
https://googology.fandom.com/wiki/Googology_Wiki
http://www.mrob.com/pub/math/largenum.html
https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/37/stukjes-pythagoras/jg57/2018-06-zandrekenaar-i.pdf
https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/37/stukjes-pythagoras/jg58/2018-09-zandrekenaar-ii.pdf
https://pyth.eu/archimedes-de-runderen-van-de-zonnegod
https://sites.google.com/site/largenumbers/home/2-3/skewes-numbers
https://sites.google.com/site/largenumbers/home/3-2/3-2-9-graham
https://en.wikipedia.org/wiki/Large_numbers
http://web.mit.edu/arayo/www/brink-duel.pdf
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Conway_chained_arrow_notation
https://www.youtube.com/watch?v=oAUuHgu7FyM
https://googology.fandom.com/wiki/Bowers%27_Exploding_Array_Function
https://www.youtube.com/watch?v=wPEYoW0Mj1U
https://www.youtube.com/watch?v=Wv65xhrJ0zc
https://www.youtube.com/watch?v=LJR24_Povzw
https://nl.wikipedia.org/wiki/Ordinaalgetal
https://towardsdatascience.com/how-big-is-the-number-tree-3-61b901a29a2c
https://www.popularmechanics.com/science/math/a28725/number-tree3/
https://risingentropy.com/the-mindblowing-goodstein-sequences/
https://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s_theorem
https://googology.fandom.com/wiki/Busy_beaver_function
https://googology.fandom.com/wiki/Rayo%27s_number
https://en.wikipedia.org/wiki/Rayo%27s_number

Youtube

Ridiculously Huge Numbers (David Metzler)
Math: Extremely Large Numbers (Giroux)
The Entire History of Large Numbers
The Daddy of Big Numbers (Rayo's Number) - Numberphile
TREE vs Graham's Number - Numberphile
Extremely big numbers | Arithmetic and Geometry Math Foundations 17 | N J Wildberger
https://www.youtube.com/watch?v=Z8I68E7yZeY
https://grangology.fandom.com/wiki/Grangology_Wiki

8.2. Een hiërarchie van snel stijgende functies

(Fast Growing Hierarchy)

N.B. Deze tekst is eerder geschreven dan de bewerkingsvariant en slechts op een enkele plek aangepast. Ik heb geen poging gedaan om hem helemaal te herschrijven.

Dit is de gebruikelijke vorm voor de "Snel stijgende hïerarchie" ("Fast growing Hierarchy "). Deze hiërarchie sluit wel aan bij de axioma's van Peano en start dan ook met een functie die de opvolgersrelatie weergeeft. Iedere volgende functie in de hiërarchie stijgt sneller dan alle vorige waarbij het begrip sneller stijgen (of groeien) gedefinieerd wordt door:

Een functie *f* groeit sneller dan een andere functie *g* wanneer vanaf een zekere N

$$f(n) > g(n)\ voor\ alle\ n\ > N$$

We beginnen met hetzelfde procedé van ééntje erbij (de Opvolger), optellen (herhaald eentje erbij) , vermenigvuldigen (herhaald optellen), machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen), tetreren (herhaald machtsverheffen) etc. zoals we dat al eerder gezien bij de introductie van de pijlnotatie van Knuth.

$$f_0(n) = n + 1$$

$$f_1(n) = f_0^n(n) = \underbrace{f_0 f_0 f_0 \ldots\ldots f_0}_{n\ keer}(n) = n + n$$

$$f_2(n) = f_1^n(n) = \underbrace{f_1 f_1 f_1 \ldots\ldots f_1}_{n\ keer}(n) = 2.2.2 \ldots 2.n = 2^n.n \geq 2^n$$

$$f_3(n) = f_2^n(n) = \underbrace{f_2 f_2 f_2 \ldots\ldots f_2}_{n\ keer}(n) \geq 2{\uparrow\uparrow}n$$

(Dit is een enorme onderschatting. Reken $f_3(3)$ maar eens echt uit! Maar eerst een gokje.)
[the-fast-growing-hierarchy-a-journey-up-an-endless-ladder]
[allamsnumbers/home/part-3/the-fast-growing-hierarchy]

$$f_{m+1}(n) = f_m^n(n) \geq 2 \uparrow^{m-1} n$$

Met telkens opnieuw recursief itereren hebben we zo voor ieder natuurlijk getal een functie en als $k > l$ dan weten we ook $f_k > f_l$.

Hoe maken we nu een volgende functie die sneller groeit d.w.z. vanaf een zekere *n* groter is dan elke functie f_k , welke *k* we ook kiezen. We gaan diagonaliseren!

$$f_{di}(n) = f_n(n)$$

$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	$f_0(5)$	….	….
$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	$f_1(5)$	….	….
$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	$f_2(5)$	….	….
$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$f_3(4)$	$f_3(5)$	….	….
$f_4(0)$	$f_4(1)$	$f_4(2)$	$f_4(3)$	$f_4(4)$	$f_4(5)$	….	….
$f_5(0)$	$f_5(1)$	$f_5(2)$	$f_5(3)$	$f_5(4)$	$f_5(5)$	….	….
….	….	….	….	….	….	$f_6(6)$	….
….	….	….	….	….	….	….	….

$f_{di}(n)$ groeit sneller dan $f_k(n)$ voor alle k

Dan is weliswaar voor alle $n < k$: $f_{di}(n) = f_n(n) < f_k(n)$

maar zo gauw $n > k$ geldt: $f_{di}(n) = f_n(n) > f_k(n)$

Dat diagonaliseren gaan we nog vaker doen en iedere keer zal het nodig zijn wanneer we in reeks verzeild raken waar we maar door blijven kunnen tellen. We gaan al die diagonalisatiestappen een andere naam geven. Om redenen die van lieverlee duidelijk worden kiezen we daarbij voor de limietordinaalgetallen van Cantor.
https://nl.wikipedia.org/wiki/Ordinaalgetal

Deze eerste diagonalisatie krijgt "ω" als index mee.

$$f_\omega(n) = f_n(n)$$

Wat wordt nu de functie die hier weer "overheen" moet?
Simpel: we vallen weer terug op onze recursieve herhaling:

$$f_{\omega+1}(n) = f_\omega^n(n)$$

Wat betekent dat concreet? Neem b.v. n=2 dan $f_{\omega+1}(2)$

$= f_\omega^2(2) = f_\omega f_\omega(2) = f_\omega f_2(2) \geq f_\omega(2^2.2) = f_\omega(8) = f_8(8) \geq 2 \uparrow^7 8$

en $2 \uparrow^7 8 = 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 (2 \uparrow^6 2) =$

$= 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 2 \uparrow^6 (2 \uparrow^5 2 \uparrow^5 2 \uparrow^5 2 \uparrow^5 2 \uparrow^5 2) =$ etc.

Voor n=3 verschrompelt $f_{\omega+1}(2)$ want

$$f_{\omega+1}(3) = f_\omega^3(3) = f_\omega f_\omega f_\omega(3) = f_\omega f_\omega f_3(3) \geq f_\omega f_\omega\left(10^{10^{8,083}}\right)$$
$$= f_\omega f_\omega\left(10^{10^{8,083}}\right) = f_\omega f_{10^{10^{8,083}}}\left(10^{10^{8,083}}\right) = \cdots$$

Zelfs onze onderschatting van $2\uparrow\uparrow 3$ voor f_3 (3) levert al een idioot groot getal op

$= f_\omega^3(3) = f_\omega f_\omega f_\omega(3) = f_\omega f_\omega f_3(3) \geq f_\omega f_\omega\left(2^{2^2}\right) = f_\omega f_\omega(16) =$

$$= f_\omega f_{16}(16) \geq f_\omega(2 \uparrow^7 8) = f_{2\uparrow^7 8}(2 \uparrow^7 8) =$$

$$= (2 \uparrow^7 8) \uparrow^{2\uparrow^7 8(-1)} (2 \uparrow^7 8)$$

$(2 \uparrow^7 8)$ is al een immens groot getal, laat staan $(2 \uparrow^7 8) \uparrow^{2\uparrow^7 8(-1)} (2 \uparrow^7 8)$!

Het vervolg van de reeks is nu weer vrij simpel: $f_{\omega+2}$, $f_{\omega+3}$, $f_{\omega+4}$, etc.

Je voelt het al weer aankomen, we gaan weer diagonaliseren met $f_{\omega+\omega} = f_{\omega.2}$

Vervolgens weer $f_{\omega.2+1}, \ldots.$

Nog een keer uitrekenen wat $f_{\omega.2+1}(2)$ oplevert?

$f_{\omega.2+1}(2) = f_{\omega.2} f_{\omega.2}\,(2) = f_{\omega.2}(f_{\omega+2}\,(2)) = f_{\omega.2}\big(f_{\omega+1}\, f_{\omega+1}\,(2)\big) =$

$= f_{\omega.2}\big(f_{\omega+1}\, f_\omega^2\,(2)\big) = f_{\omega.2}\big(f_{\omega+1}\, f_\omega\, f_2\,(2)\big) = f_{\omega.2}\big(f_{\omega+1}\, f_\omega\,(8)\big) =$

$= f_{\omega.2}\big(f_{\omega+1}\, f_8\,(8)\big) = f_{\omega.2}\big(f_{\omega+1}\,(2 \uparrow^7 8)\big) = f_{\omega.2}\big(f_\omega^{2\uparrow^7 8}(2 \uparrow^7 8)\big) =$

$=f_{\omega.2}\big(f_\omega^{2\uparrow^7 8}(2 \uparrow^7 8)\big) = f_{\omega.2}(f_\omega f_\omega f_\omega \ldots. f_\omega(2 \uparrow^7 8))$ met $(2 \uparrow^7 8) f_\omega{}'s!$ en daarna komt er nog een $f_{\omega.2}$ die nu niet op 2 maar op een monstrueus getal wordt losgelaten.

En zo gaat het maar door, na $\omega.2$ komt $\omega.3$,… komt ω^2 , ω^3 , …. eindigend met ω^ω, verder met $\omega^\omega + 1$, etc. We gaan niet meer in detail het rijtje af maar via $\omega^\omega + \omega$,…., $\omega^\omega + \omega^\omega$, … , ω^{ω^ω}, … , .. sluiten wij hier af met $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ een oneindige toren van ω's, in de theorie van de ordinaalgetallen ϵ_0. Na f_{ϵ_0} komt natuurlijk gewoon weer f_{ϵ_0+1} etc. maar dat doen we niet meer, dat zoek je maar uit via de links.

https://nl.wikipedia.org/wiki/Ordinaalgetal

https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_number

Ondanks het intensieve gebruik van de symbolen voor “oneindige” ordinaalgetallen, de limietordinalen, maken we nergens echt gebruik van “oneindig”. Alle getallen die we maken en verder weer gebruiken om nog grotere te genereren zijn en blijven eindige getallen!

Bekende grote getallen en hun plek in de hiërarchie

$n=$	*1*	*2*	*3*	*4*
$\boldsymbol{f_0(n)}$	2	3	4	5
$\boldsymbol{f_1(n)}$	2	4	6	8
$\boldsymbol{f_2(n)}$	2	8	24	64
$\boldsymbol{f_3(n)}$	2	2047	$7.10^{121.210.694}$	..
$\boldsymbol{f_4(n)}$	2	..	..	..

Bijna alle grote getallen waar we onze reis mee begonnen zijn kleiner dan $f_4(4)$, alleen het getal van Graham staat een behoorlijk eind verder in de rij, pas $f_{\omega+1}(64) >$ getal van Graham.

Knuth's pijlnotatie vindt haar equivalent helemaal in de eerste iteratiereeks, want we hadden al gezien dat $f_{m+1}(n) \gtrsim 2 \uparrow^m n$.

Voor getallen in Conways notatie vinden we de equivalenten tussen $f_\omega(n)$ en $f_{\omega^2}(n)$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Large_numbers