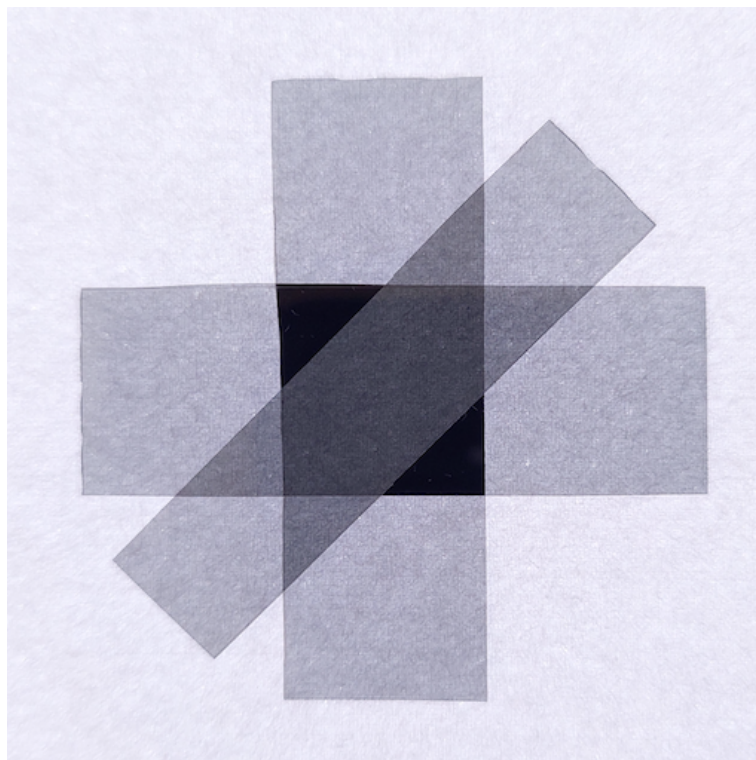


Introductie Quantummechanica

Ralf Simons

14-10-2025



Inhoud

1	Introductie	3
2	Constante van Planck	4
2.1	Stralingswet van Planck	4
2.2	Eenheid van h	5
2.3	De Broglie	6
2.4	Spin	6
2.5	Experiment: Meting van h met leds	7
3	Onzekerheidsrelatie van Heisenberg	10
3.1	Mr Tompkins	10
3.2	Experiment: Enkelspleet	12
4	Metten is weten?	14
4.1	Quantumtoestanden	14
4.2	Superpositie	14
4.3	Experiment: 3 polarisatiefilters	17
5	Literatuur en weblinks	21

1 Introductie

Het woord "quantum"¹ in quantummechanica komt van het Latijnse woord "quantus", dat "hoeveel" betekent. Een fundamenteel kenmerk van de quantumwereld is dat bepaalde grootheden alleen in discrete hoeveelheden kunnen bestaan. In de klassieke mechanica daarentegen kan alles continu variëren. De maatstaf van deze hoeveelheden in de quantummechanica is de constante van Planck h .

Deze workshop is bedoeld als kennismaking met de theorie van de quantummechanica. Met drie redelijk eenvoudige experimenten worden verschillende basisconcepten van deze theorie toegelicht:

- **Quantisatie:**

De energie van fotonen (lichtdeeltjes) is gequantiseerd. Met een onderzoek aan eenvoudige leds wordt de constante van Planck bepaald (zie hoofdstuk 2.5).

- **Onzekerheidsrelatie van Heisenberg:**

Dit principe uit de quantummechanica zegt dat bepaalde paren van grootheden niet tegelijkertijd met willekeurige precisie gemeten kunnen worden (zoals bijvoorbeeld positie en impuls). Een demonstratie hiervan is een proefje met laserlicht en een verstelbare enkelspleet: Hoe smaller de spleet hoe breder de lichtvlek op het scherm (zie hoofdstuk 3.2).

- **Superpositie:**

De quantumtoestand van een elementair deeltje kun je beschrijven als de combinatie (superpositie) van een aantal basistoestanden. Hiermee kan de "three-polarizer paradox" verklaard worden (zie hoofdstuk 4.3).

¹In het Nederlands is de correcte spelling "kwantum". In het Duits en Engels schrijven ze daarentegen "quantum". In dit document geeft de auteur de voorkeur voor deze spelling.

2 Constante van Planck

2.1 Stralingswet van Planck

In het jaar 1900 probeerde de natuurkundige Max Planck (1858 - 1947) een formule te vinden, die de verdeling van de elektromagnetische straling van een zwarte straler beschrijft. Een zwarte straler, ook wel zwart lichaam genoemd, is een ideaal object dat alle elektromagnetische straling die erop valt, absorbeert. Het reflecteert geen enkele straling en zendt zelf straling uit puur op basis van zijn temperatuur. Voor grote golflengtes bestond er al een formule om de verdeling van de straling weer te geven (wet van Rayleigh-Jeans). Maar deze formule leverde voor korte golflengtes een oneindige intensiteit. Dit staat ook bekend als ultravioletcatastrofe.

Planck had het idee dat de uitgezonden energie niet continu is, maar in kleine energiepakketjes ofwel quanta wordt uitgezonden. De grootte van zo een energiequantum is:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad (1)$$

Hierbij is h wat we nu de constante van Planck² noemen, f is de frequentie en λ is de golflengte van de elektromagnetische straling. De lichtsnelheid wordt met c weergegeven.

De wet van Planck luidt als volgt (eerst in frequentievorm (2) en dan in golflengtevorm (3)):

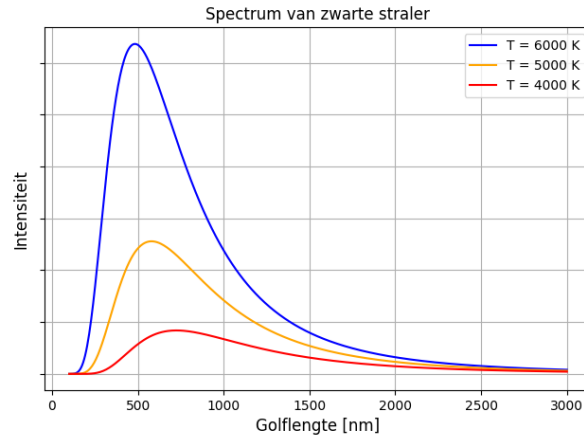
$$I(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/(kT)} - 1} \quad (2)$$

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} \quad (3)$$

Hierbij zijn $I(f, T)$ en $I(\lambda, T)$ de intensiteiten per frequentie-eenheid respectievelijk golflengte-eenheid bij de temperatuur T . De constante van Boltzmann is k . In het Engels heten deze intensiteiten "spectral radiance". De SI-eenheden³ zijn: $[I(f, T)] = \text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ en $[I(\lambda, T)] = \text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$. De afkorting "sr" staat voor steradiaal en is de SI-eenheid voor ruimtehoek. Het diagram op de volgende pagina laat de intensiteiten voor drie verschillende temperaturen zien.

²Planck gebruikte de letter " h " omdat hij een *Hilfsgröße* (hulpgrootheid) nodig had om zijn formule uiteindelijk kloppend te maken.

³Met vierkante hakjes links en rechts van een grootheid wordt in dit document de eenheid van deze grootheid aangegeven: [grootheid] = eenheid van de grootheid.



Wat valt op? Bij hogere temperaturen verschuift het maximum naar kortere golflengtes (verschuivingswet van Wien). En de totale intensiteit neemt toe met de temperatuur (wet van Stefan-Boltzmann).

2.2 Eenheid van h

De constante van Planck heeft een waarde van $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js. De eenheid van deze constante (Js) is dus het product van energie (J = joule) en tijd (s = seconde). In de natuurkunde noem je deze grootheid "actie" (in het Engels "action" of in het Duits "Wirkung"). Op het gebied van kleine deeltjes wordt de energie vaak weergegeven in "eV" (elektronvolt). Hierbij is $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. De constante van Planck wordt dan $h = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$.

In de quantummechanica wordt vaak een variant van de constante van Planck gebruikt. Deze wordt geschreven als $\hbar$. In het Nederlands zeg je "h-streep" of in het Engels "h-bar". De definitie is als volgt:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (4)$$

Bovenaan hadden we gezien dat de eenheid van h het product is van de eenheden van energie (E) en tijd (t). Maar je kunt het ook schrijven als het product van de eenheden van impuls (p) en lengte (l). De grootheid impulsmoment (L) heeft dezelfde eenheid als h .

$$[h] = [E] \cdot [t] = \text{Js} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

$$[h] = [p] \cdot [l] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (6)$$

$$[h] = [L] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (7)$$

2.3 De Broglie

De vergelijking (6) suggereert dat een verband tussen de impuls p van een deeltje en een lengte-eigenschap van dit object bestaat. Inderdaad: De Franse natuurkundige Louis-Victor de Broglie had in zijn proefschrift gepostuleerd dat materie met een impuls p ook een golfkarakter heeft. De genoemde lengte-eigenschap is dus niets anders dan de golflengte λ . Dit is de vergelijking van De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (8)$$

Inmiddels hebben vele experimenten aangetoond dat alle deeltjes zich onder bepaalde omstandigheden als golven gedragen en alle golven zich onder bepaalde omstandigheden als een stroom deeltjes gedragen. Dit noemen ze ook wel de dualiteit van golven en deeltjes.

2.4 Spin

We hadden gezien dat de constante van Planck dezelfde eenheid heeft als de grootheid impulsmoment (zie vergelijking (7)). De kleine deeltjes in de quantumwereld hebben een intrinsiek impulsmoment dat de wetenschappers spin noemen. Deze spin heeft een waarde die of een halftallige ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc.) of een heeltallige (0, 1, 2, etc.) veelvoud van de gereduceerde constante van Planck $\hbar$ (zie vergelijking (4)) is.

De spin S_z van een elektron heeft twee mogelijke toestanden. In het Engels vaak aangeduid met "spin up" en "spin down". De muurschildering op het huis Gerecht 13 in Leiden laat twee keer een draaiende bol zien⁴. De ene draait linksom en de andere rechtsom. Ze visualiseren de spin van het elektron. De waarde van deze spins zijn $S_z = -\frac{1}{2} \hbar$ respectievelijk $S_z = +\frac{1}{2} \hbar$. In feite is het zo dat een elektron niet werkelijk om zijn eigen as draait. Het is meer een hulpmiddel om te beschrijven dat een elektron een eigenschap heeft die op een impulsmoment lijkt en twee verschillende waardes kan aannemen.

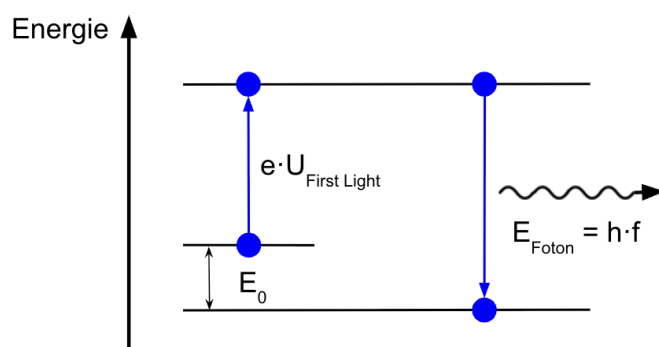
⁴<https://muurformules.nl/images/spin3.jpg>

2.5 Experiment: Meting van h met leds

Je kunt met leds (van het Engelse light-emitting diode) op een eenvoudige manier een schatting maken van de constante van Planck. Hierbij gebruik je het verband tussen de spanning ($U_{\text{FirstLight}}$) waarop een led begint te gloeien en de frequentie f van het uitgezonden licht.

$$h \cdot f = e \cdot U_{\text{FirstLight}} + E_0 \quad \Rightarrow \quad U_{\text{FirstLight}} = \frac{h}{e} \cdot f - \frac{E_0}{e} \quad (9)$$

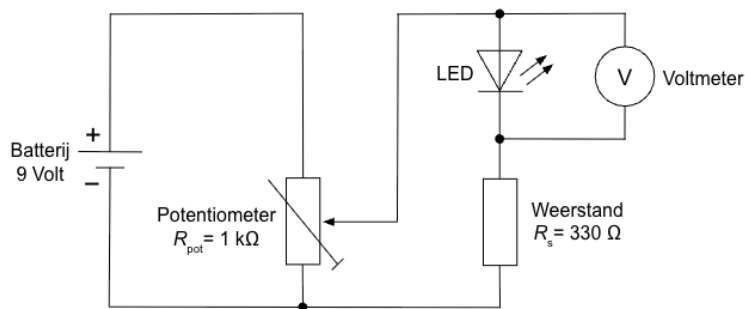
” e ” is hierbij de elementaire lading ($e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}$ C). De energie E_0 wordt bepaald door de interne eigenschappen van de leds en ook door de meetmethode. Het volgende diagram geeft een overzicht hoe de energie van het elektron (blauwe stip) omgezet wordt in de uitstraling van een foton met de frequentie f :



Relevant is de berekening van de richtingscoëfficiënt ($r = h/e$). Hiermee kun je dan uiteindelijk de constante van Planck bepalen:

$$r = \frac{h}{e} \quad \Rightarrow \quad h = r \cdot e \quad (10)$$

Voor dit experiment heb je niet veel nodig: een aantal leds met verschillende kleuren, een breadboard met wat kabeltjes, een regelbare weerstand (potentiometer) van $1 \text{ k}\Omega$, een weerstand van 330Ω , een 9V-batterij en een voltmeter. Alle leds hebben een doorzichtige behuizing. Op de website van de leverancier staan de golflengtes vermeld. In de appendix van dit document is een lijst van alle gebruikte leds (10 stuks per kleur) te vinden. Van iedere led werd in een donkere omgeving de spanning $U_{\text{FirstLight}}$ gemeten wanneer de led begint te gloeien. Als lichtdetector wordt dus het menselijke oog gebruikt. Dit is in dit geval een simpele methode maar is natuurlijk heel subjectief.



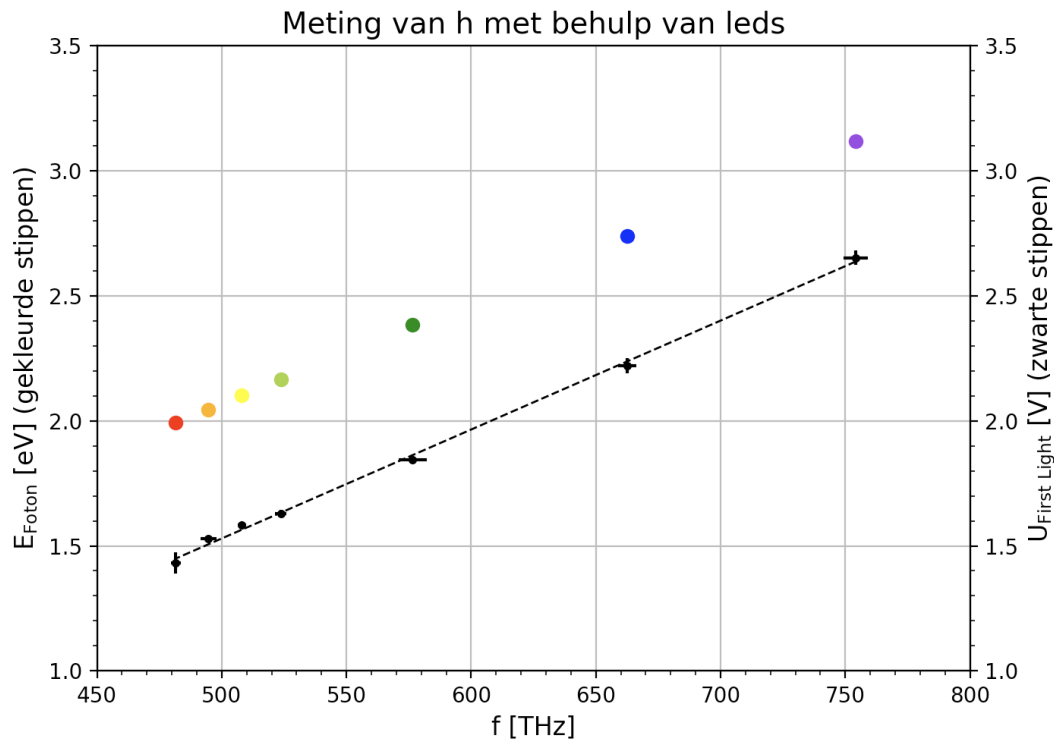
De volgende tabel laat zowel de meetresultaten voor $U_{\text{FirstLight}}$ als ook de berekende energie van de fotonen ($E_{\text{Foton}} = h \cdot f$) zien. Voor deze berekening werd de exacte waarde $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ gebruikt.

Kleur	λ [nm]	f [THz]	E_{Foton} [eV]	$U_{\text{FirstLight}}$ [V]
rood	620 - 625	482 ± 2	1,992	$1,432 \pm 0,042$
oranje	602 - 610	495 ± 3	2,046	$1,528 \pm 0,009$
geel	588 - 592	508 ± 2	2,101	$1,584 \pm 0,012$
groen/geel	570 - 575	524 ± 2	2,166	$1,629 \pm 0,014$
groen	515 - 525	577 ± 6	2,384	$1,845 \pm 0,013$
blauw	450 - 455	663 ± 4	2,740	$2,20 \pm 0,03$
ultraviolet	395 - 400	754 ± 5	3,119	$2,65 \pm 0,03$

Het diagram op de volgende pagina geeft de waarden uit deze tabel grafisch weer. De linker y-as is gerelateerd aan de gekleurde stippen die de energie van de fotonen voor een bepaalde frequentie f aangeven. Voor de zwarte stippen geeft de rechter y-as de gemeten spanning $U_{\text{FirstLight}}$ weer.

De horizontale foutbalken zijn afkomstig uit de specificaties van de leverancier voor de golflengtes van de leds (zie weblinks in hoofdstuk 5). Deze golflengtes hebben een maximale onzekerheid van $\pm 5 \text{ nm}$. Maar de spectrale bandbreedte van een led is doorgaans 20-60 nm (volgens algemene bronnen op het internet). Dus de horizontale foutbalken zijn waarschijnlijk nog om een factor 10 groter.

De verticale foutbalken zijn de onzekerheden van de gemeten spanningen $U_{\text{FirstLight}}$ (zie tabel bovenaan).



De zwarte onderbroken lijn is de beschrijving van de gemeten spanningen door een lineaire functie. De richtingscoëfficiënt is $r = 4,358 \cdot 10^{-15} \text{ V / Hz}$. Met behulp van vergelijking (10) en de kennis van de elementaire lading e kunnen we dan h berekenen. Wanneer je de helling van de onderbroken lijn binnen de foutbalken varieert, kun je inschatten hoe groot de fout in h is. Dit levert het volgende eindresultaat:

$$h = (7,0 \pm 0,6) \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (11)$$

Dit resultaat wijkt ongeveer 6% af van de echte waarde van h .

De energie E_0 uit vergelijking (9) heeft bij de uitvoering van dit experiment een waarde van $E_0 = (0,52 \pm 0,03) \text{ eV}$.

Een andere methode om de constante van Planck te meten gebruikt het foto-elektrisch effect⁵. Nog preciezer kun je h met de Kibblebalans⁶ meten.

Het Internationale Stelsel van Eenheden (SI-stelsel) heeft de waarde van de constante van Planck inmiddels gedefinieerd. Sinds 20 mei 2019 is de exacte waarde van $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelectric_effect

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Kibble_balance

3 Onzekerheidsrelatie van Heisenberg

De onzekerheidsrelatie van Heisenberg is een fundamenteel principe uit de quantummechanica dat stelt dat bepaalde paren van grootheden niet tegelijkertijd met willekeurige precisie gemeten kunnen worden. Het bekendste voorbeeld is de relatie tussen de positie (x) en de impuls (p) van een deeltje:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (12)$$

Hierbij zijn Δx en Δp de onzekerheden in de positie respectievelijk in de impuls. In woorden betekent dit: hoe nauwkeuriger je de positie van een deeltje bepaalt, hoe minder je kunt weten over zijn impuls (en omgekeerd). Dit is geen beperking van de meetapparatuur, maar een fundamenteel gevolg van de natuur zelf. Naast positie en impuls bestaan ook andere paren van grootheden, waarvoor een onzekerheidsrelatie geldt, bijvoorbeeld energie en tijd.

3.1 Mr Tompkins

Mr Tompkins is de titelfiguur in een reeks van vier populairwetenschappelijke boeken van de natuurkundige George Gamow, die vanaf 1940 verschenen. De boeken zijn opgebouwd als een reeks dromen waarin Mr Tompkins werelden betreedt waar de natuurkundige constanten radicaal andere waarden hebben dan in de echte wereld. Gamow gebruikte dit om moderne wetenschappelijke theorieën aan een breder publiek uit te leggen.

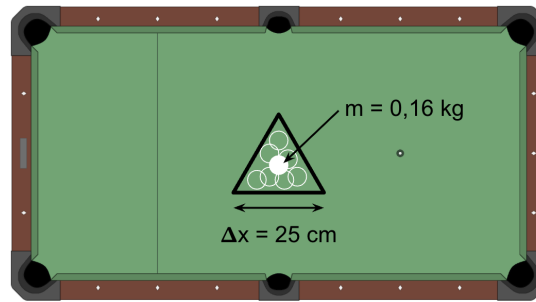
In een van deze dromen wordt aan Mr Tompkins de onzekerheidsrelatie van Heisenberg uitgelegd. Op een biljarttafel ligt een biljartbal. Stel nu dat de constante van Planck veel, veel groter is dan de echte waarde. We maken de aanname dat in onze nieuwe wereld $\hbar/2 = 1 \text{ Js}$ is. Dan zou de onzekerheidsrelatie van Heisenberg er zo uitzien:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq 1 \text{ Js} \quad (13)$$

Nu wordt de biljartbal (massa $m = 0,16 \text{ kg}$) binnen een driehoek met een zijlengte van $\Delta x = 25 \text{ cm}$ geplaatst. Wat gaat de bal dan doen? Je kunt makkelijk uitrekenen dat in deze wereld de bal heel, heel snel binnen de driehoek heen en weer gaat rollen. Voor de onzekerheid in de meting van de snelheid (Δv) van de biljartbal zou dan gelden:

$$\Delta v \geq \frac{1 \text{ Js}}{m \cdot \Delta x} = \frac{1 \text{ Js}}{0,16 \text{ kg} \cdot 0,25 \text{ m}} = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h} \quad (14)$$

De onzekerheid Δv is dus 90 km/h. De biljartbal blijft dus niet meer stil liggen maar deze zit ergens binnen de driehoek.



Maar wat gaat de bal doen wanneer de constante van Planck weer de echte waarde heeft ($\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Js):

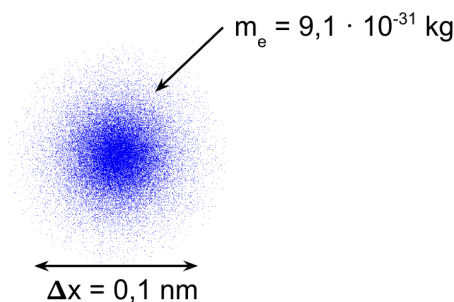
$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2 \cdot m \cdot \Delta x} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 0,16 \text{ kg} \cdot 0,25 \text{ m}} = 1,3 \cdot 10^{-33} \text{ m/s} \quad (15)$$

Deze snelheid is zo vreselijk klein dat je kunt zeggen dat de bal niet beweegt. Dit is ook wat we observeren. Voor ons dagelijks leven heeft de onzekerheidsrelatie van Heisenberg geen betekenis. Deze is alleen belangrijk in de wereld van de atomen en de kleine deeltjes. Bijvoorbeeld:

Een waterstofatoom heeft een diameter van ongeveer 0,1 nm ($= 0,1 \cdot 10^{-9}$ m). De positie van het elektron in waterstof wordt dus bepaald met een onzekerheid van $\Delta x = 0,1$ nm. De massa van één elektron is $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Voor de onzekerheid Δv van de snelheid van het elektron betekent dit:

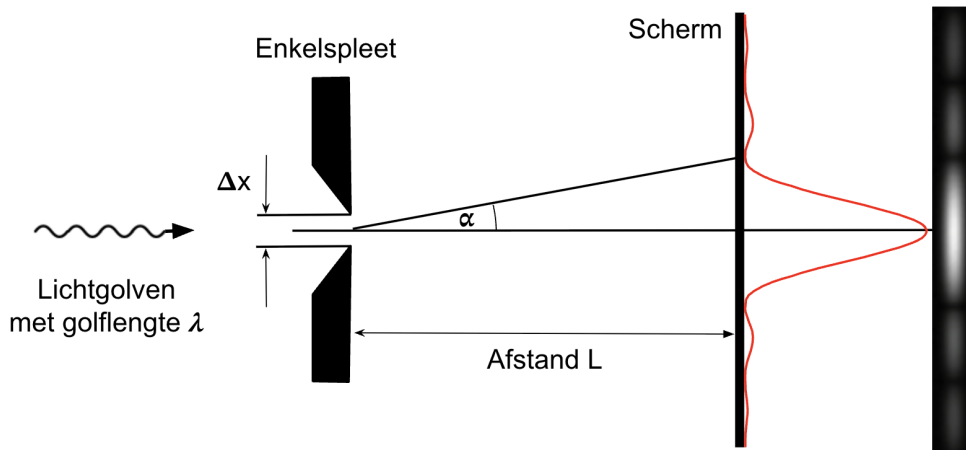
$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2 \cdot m_e \cdot \Delta x} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 580 \text{ km/s} \quad (16)$$

De snelheid van het elektron is dus heel groot. Het elektron zit in een wolk rond de kern (zie diagram onderaan). De kleine blauwe stipjes geven de posities van één elektron weer.

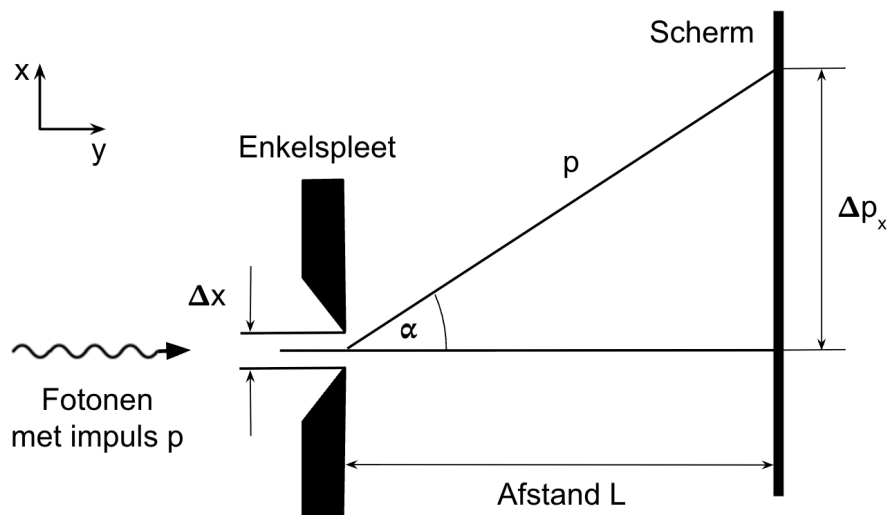


3.2 Experiment: Enkelspleet

Wanneer licht met een golflengte λ door een enkelspleet met de breedte Δx gaat, verspreiden de lichtgolven zich vanuit de spleet in alle richtingen, volgens het principe van Huygens. Deze verspreide golven interfereren met elkaar (zowel constructief als destructief) en produceren een patroon van heldere en donkere banden op een scherm. Gezien vanaf de optische as vinden we het eerste minimum van de intensiteit onder een hoek α met $\sin \alpha = \lambda / \Delta x$.



We kunnen dit experiment ook benaderen vanuit het feit dat licht naast het golfkarakter ook een deeltjeskarakter heeft: Fotonen (lichtdeeltjes) met een impuls p gaan door de enkelspleet (breedte Δx) en komen dan ergens op een scherm terecht. De scherm staat op een afstand L van de enkelspleet. De energie E van het foton verandert bij het passeren van de spleet niet. Dus ook de impuls $p = E/c$ verandert qua grootte niet.

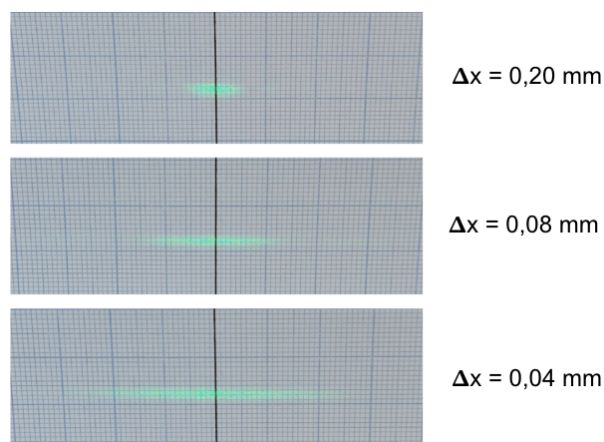
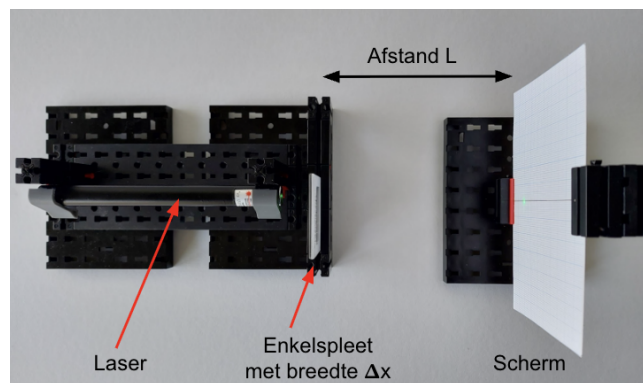


Maar waar de fotonen op het scherm terecht komen is onzeker. De impulsvector $\vec{p}$ van een foton kun je opsplitsen in een deel die langs de x -as wijst en een deel die langs de y -as wijst: $\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y$. De onzekerheid Δp_x van de component in x -richting wordt bepaald door de onzekerheidsrelatie van Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (17)$$

Dit betekent: Hoe smaller de enkelspleet is, hoe breder het patroon op de scherm wordt. Of anders geformuleerd: Hoe nauwkeuriger je weet waar het deeltje is (door een smalle spleet), hoe minder nauwkeurig je weet waar het naartoe gaat.

Onderaan zie je een eenvoudige meetopstelling met een laser (golflengte $\lambda = 532 \text{ nm}$), een diaraampje met een aantal individuele enkelspleten ($\Delta x = 0,20 \text{ mm}; 0,08 \text{ mm}; 0,04 \text{ mm}$). De afstand L tussen een enkelspleet en de scherm was tijdens de metingen $L = 300 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$. De scherm heeft een rooster met een millimeter-indeling.



Het is duidelijk te zien dat de lichtvlek op het scherm groter wordt wanneer de breedte van de enkelspleet kleiner wordt.

4 Meten is weten?

In de klassieke fysica wordt aangenomen dat objecten een reële, waarnemer-onafhankelijke toestand hebben, ongeacht of ze worden gemeten. Een steen heeft een bepaalde positie en snelheid, ongeacht of je hem observeert of niet. Meten is in deze context het bepalen van de bestaande toestand.

In de quantummechanica is de toestand van een systeem niet altijd gedefinieerd voordat het gemeten wordt. Een quantumdeeltje, zoals een elektron, kan zich in een superpositie ofwel combinatie (zie hoofdstuk 4.2) van toestanden bevinden, bijvoorbeeld op meerdere plekken tegelijk. Pas wanneer je het deeltje meet, "kiest" het een specifieke toestand.

Dit fenomeen, waarbij meten de toestand van een systeem verandert, staat bekend als het meetprobleem. Het is een van de meest fundamentele aspecten van de quantummechanica.

4.1 Quantumtoestanden

De toestand van een quantumdeeltje wordt wiskundig beschreven door de golffunctie Ψ . De golffunctie zelf is geen fysiek meetbare grootheid en heeft een complexe waarde⁷. Maar het kwadraat van de absolute waarde van de golffunctie ($|\Psi|^2$) geeft de kans weer om bijvoorbeeld een deeltje op een positie x en tijd t aan te treffen.

De golffunctie is de oplossing van de Schrödingervergelijking:

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad (18)$$

Dit is de fundamentele vergelijking die het gedrag van quantumsystemen bepaald. Hierbij is i de imaginaire eenheid, $\hbar$ is de gereduceerde constante van Planck. H geeft de energie van het systeem weer. De bedenker van deze vergelijking was de Oostenrijkse natuurkundige Erwin Schrödinger (1887 - 1961).

4.2 Superpositie

In de quantummechanica betekent superpositie dat een deeltje (zoals een elektron, foton, of ander quantumobject) tegelijkertijd in meerdere toestanden kan verkeren, totdat (!) er een meting wordt gedaan. In de klassieke wereld (zoals bij een munt), is iets óf kop óf munt. In de quantumwereld

⁷Complexe getallen c bestaan uit een reëel (a) en imaginair (b) deel met $c = a + i \cdot b$. Hierbij is i de imaginaire eenheid met $i^2 = -1$.

kan een munt tegelijkertijd kop én munt zijn – tot je ernaar kijkt. Pas bij het meten ”kiest” het systeem één toestand.

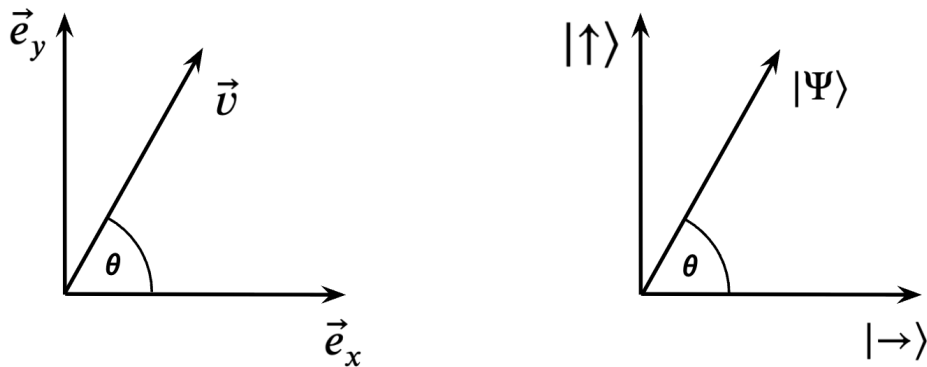
In hoofdstuk 4.3 wordt de superpositie in de quantummechanica met een experiment toegelicht. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een eigenschap van licht die we polarisatie noemen.

De toestand van een foton (lichtdeeltje) geven we weer met het symbool $|\Psi\rangle$. We gebruiken hier de notatie voor golffuncties die door de Britse natuurkundige Paul Dirac (1902-1984) werd ingevoerd: $|\Psi\rangle$ is een ket-vector⁸. Voor fotonen is deze toestand de superpositie van de horizontale polarisatie-toestand ($|\rightarrow\rangle$) en de verticale polarisatie-toestand ($|\uparrow\rangle$). Hierbij is dan:

$$|\Psi\rangle = \cos \theta \cdot |\rightarrow\rangle + \sin \theta \cdot |\uparrow\rangle \quad (19)$$

De hoek θ geeft de richting weer van de vector $|\Psi\rangle$ ten opzichte van de horizontale polarisatie ($|\rightarrow\rangle$). Dit kun je goed vergelijken met de presentatie van bijvoorbeeld een vector $\vec{v}$ in een tweedimensionaal vlak met basisvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$:

$$\vec{v} = \cos \theta \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \vec{e}_y \quad (20)$$



We gaan nu het licht onderzoeken met een polarisatiefilter: We gaan meten! In de quantummechanica zorgt een meetproces ervoor dat de oorspronkelijke toestand ($|\Psi\rangle$) van een quantumdeeltje kapotgemaakt wordt. Het staat ook bekend als het ”Ineenstorten van de golffunctie”. De waarschijnlijkheden om de toestand $|\rightarrow\rangle$ respectievelijk $|\uparrow\rangle$ te meten zijn:

$$W_{|\rightarrow\rangle} = \cos^2 \theta \quad \text{en} \quad W_{|\uparrow\rangle} = \sin^2 \theta \quad (21)$$

Natuurlijk geven beide waarschijnlijkheden bij elkaar opgeteld het getal 1:

$$W_{|\rightarrow\rangle} + W_{|\uparrow\rangle} = 1 \quad (22)$$

⁸Voor meer informatie hierover zie bijvoorbeeld <https://nl.wikipedia.org/wiki/Diracnotatie>

Wanneer bijvoorbeeld $\theta = 45^\circ$ is dan geldt voor de golf functie $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\uparrow\rangle \quad (23)$$

De waarschijnlijkheden om $|\rightarrow\rangle$ of $|\uparrow\rangle$ te meten zijn dan:

$$W_{|\rightarrow\rangle} = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad W_{|\uparrow\rangle} = \frac{1}{2} \quad (24)$$

Dus zowel de horizontale als ook de verticale filter laten 50% van de fotonen met een oorspronkelijke oriëntatie van $\theta = 45^\circ$ door.

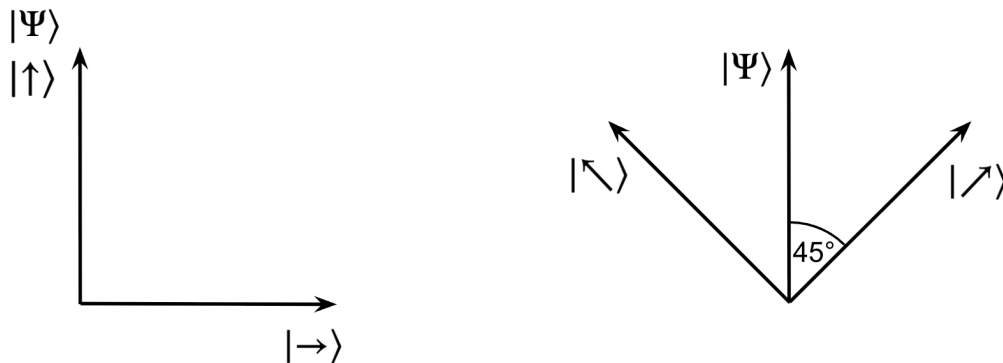
Het meetproces wordt bepaald door de oriëntatie van de polarisatiefilters. Tot nu toe hebben we alleen maar gekeken naar horizontale en verticale filters. De bijbehorende toestanden zijn $|\rightarrow\rangle$ en $|\uparrow\rangle$.

Stel we hebben een foton in een quantumtoestand $|\Psi\rangle$ die overeenkomt met de verticale vector $|\uparrow\rangle$, dus $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle$ (zie tekening links onderaan). Wanneer je dan in het systeem $|\rightarrow\rangle$ en $|\uparrow\rangle$ een meting doet, dan is de kans 100% dat het foton de verticale filter kan passeren. Een horizontale filter daarentegen blokkeert het licht volledig.

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle = 0 \cdot |\rightarrow\rangle + 1 \cdot |\uparrow\rangle \quad (25)$$

Maar wat gebeurt wanneer de meetopstelling om 45° gedraaid wordt? De nieuwe basisvectoren zijn dan: $|\nearrow\rangle$ en $|\nwarrow\rangle$ (zie tekening rechts onderaan). Dit betekent dat een foton met $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle$ een kans van 50% heeft om de "noordoost-filter" of de "noordwest-filter" te passeren.

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\nearrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\nwarrow\rangle \quad (26)$$

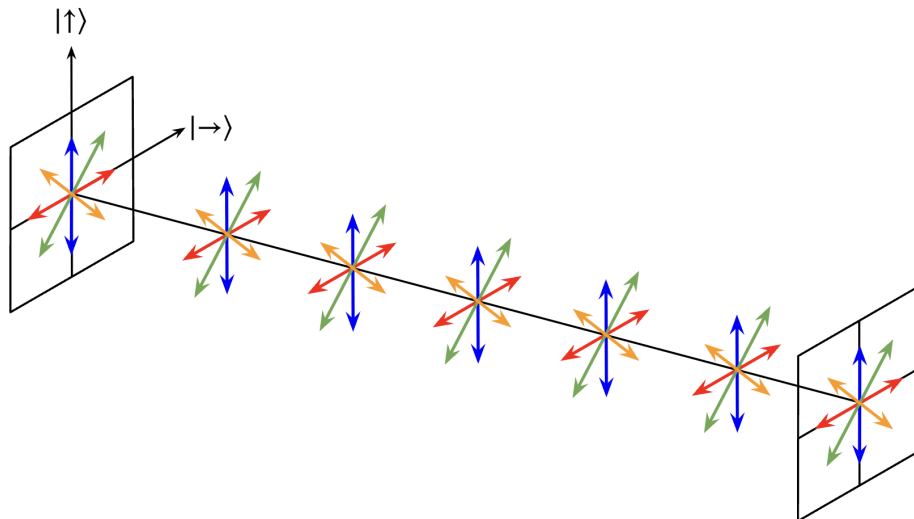


We zijn nu klaar voor het experiment.

4.3 Experiment: 3 polarisatiefilters

Met heel simpele middelen kun je een experiment uitvoeren dat ook bekend staat als de "three-polarizer paradox". Hiervoor heb je drie lineaire polarisatiefilters nodig. Bij dit proefje worden eerst twee polarisatiefilters onder een hoek van 90° (kruislings) geplaatst. Door deze opstelling gaat er geen licht meer doorheen. Wanneer echter een derde polarisator onder een hoek van 45° tussen de twee gekruiste polarisatoren wordt geschoven, zal er wel licht door alle drie de filters heen gaan.

Elektromagnetische golven (zoals zichtbaar licht) worden gekenmerkt door de trillingen van een elektrisch veld $\vec{E}$ en een magnetisch veld $\vec{B}$. De richting van het $\vec{E}$ -veld noem je de polarisatierichting. De lichtgolven van bijvoorbeeld een zaklamp hebben geen voorkeursrichting. De $\vec{E}$ -velden van deze lichtgolven trillen in alle mogelijke richtingen. Dit wordt in het diagram door de verschillend gekleurde pijtjes weergegeven:

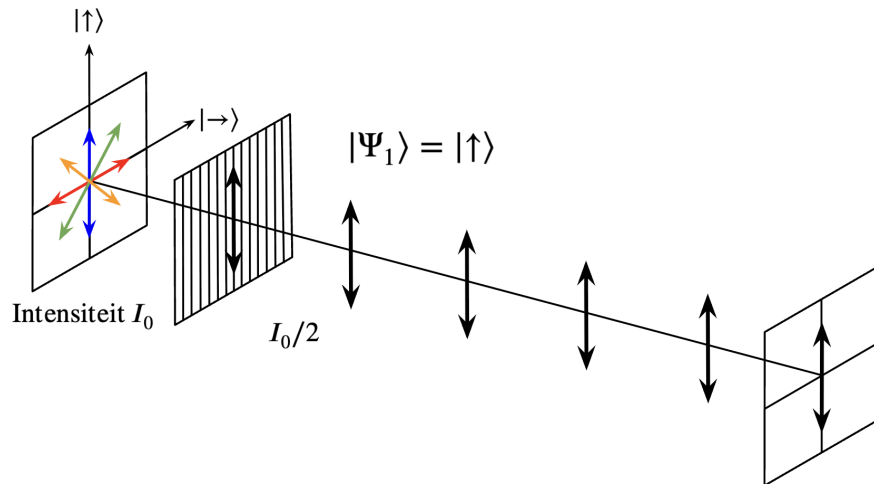


We kunnen deze fotonen ook quantummechanisch beschrijven. Ze zijn de superpositie van de twee basistoestanden $|\rightarrow\rangle$ en $|\uparrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{rood}}\rangle &= |\rightarrow\rangle = 1 \cdot |\rightarrow\rangle + 0 \cdot |\uparrow\rangle \\ |\Psi_{\text{groen}}\rangle &= |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\uparrow\rangle \\ |\Psi_{\text{blauw}}\rangle &= |\uparrow\rangle = 0 \cdot |\rightarrow\rangle + 1 \cdot |\uparrow\rangle \\ |\Psi_{\text{oranje}}\rangle &= |\searrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\uparrow\rangle \end{aligned}$$

We gaan nu een voor een de polarisatiefilters plaatsten en beschrijven de toestanden van de fotonen.

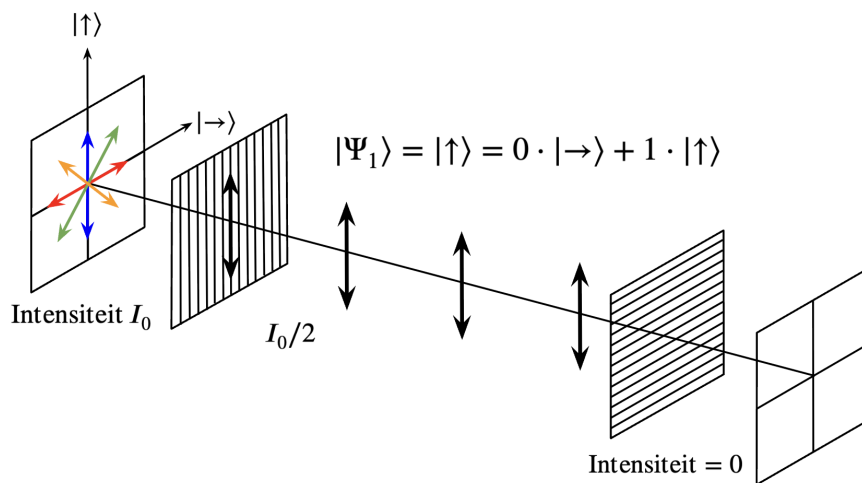
De eerste filter heeft een verticale oriëntatie. Door deze meting van de ongepolariseerde fotonen wordt een keuze gemaakt: Alleen fotonen met een verticale polarisatie worden doorgelaten. De fotonen rechts van deze filter hebben dus dan de toestand $|\Psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$. De intensiteit van het licht daalt hierbij van I_0 naar $I_0/2$ omdat alleen 50% van alle fotonen door de filter komen.



Nu wordt de tweede filter met een horizontale oriëntatie geplaatst. Zoals eerder aangegeven hebben de fotonen die door de eerste filter een quantumtoestand $|\Psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$. Dit kun je schrijven als een superpositie van $|\rightarrow\rangle$ en $|\uparrow\rangle$ als volgt:

$$|\Psi_1\rangle = |\uparrow\rangle = 0 \cdot |\rightarrow\rangle + 1 \cdot |\uparrow\rangle$$

De waarschijnlijkheid dat de tweede filter fotonen doorlaat is daarom 0%. Of anders geformuleerd: De twee gekruiste filters laten geen licht door. De intensiteit is dan nul.



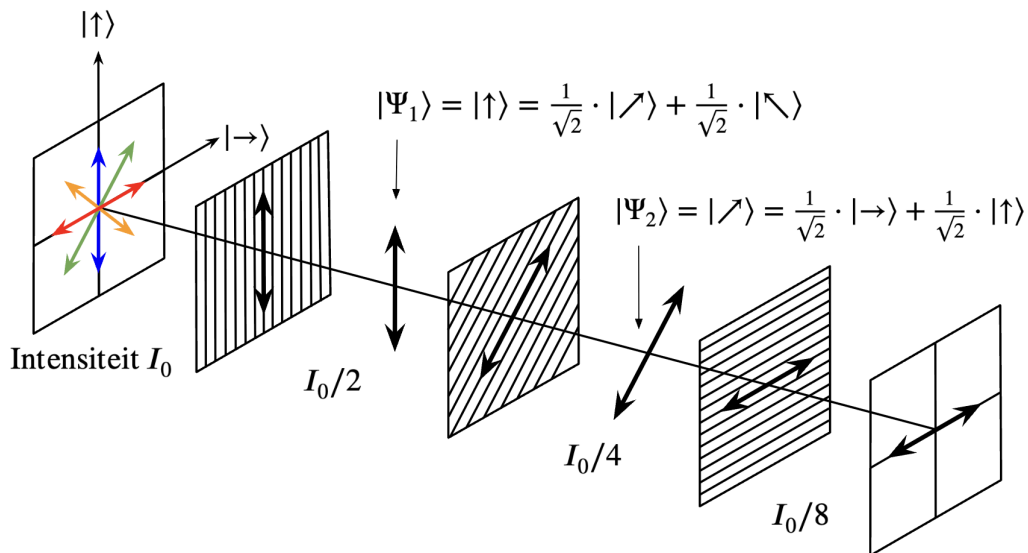
Maar nu wordt het interessant: We kunnen ervoor zorgen dat weer licht door de opstelling gaat door een derde filter onder een hoek van 45° tussen de twee gekruiste filters te plaatsen. De fotonen die de eerste (linke) filter gepasseerd hebben worden door de tussen-filter gemeten die een diagonale oriëntatie heeft. Daarom gaan we de fotonen met $|\Psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$ beschouwen als een superpositie van twee diagonale basistoestanden $|\nearrow\rangle$ en $|\nwarrow\rangle$. Omdat de hoek 45° is zijn de bijbehorende factoren $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. Dus het geldt voor $|\Psi_1\rangle$:

$$|\Psi_1\rangle = |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\nearrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\nwarrow\rangle$$

Deze golffunctie stoot bij de tussen-filter ineens en de fotonen hebben dan de toestand $|\Psi_2\rangle = |\nearrow\rangle$. Deze lichtdeeltjes naderen nu de meest rechte filter die een horizontale oriëntatie heeft. Daarom schrijven we $|\Psi_2\rangle$ als een superpositie van $|\rightarrow\rangle$ en $|\uparrow\rangle$.

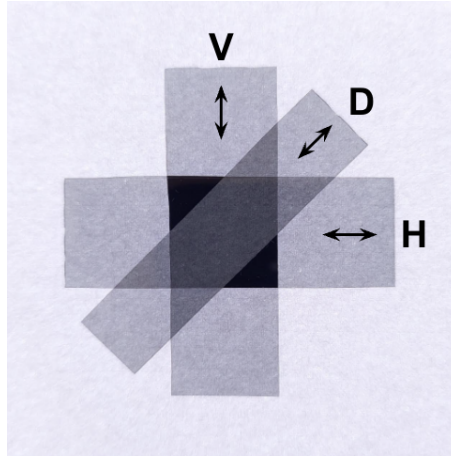
$$|\Psi_2\rangle = |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\uparrow\rangle$$

Bij het meten met de meest rechte filter wordt deze toestand kapotgemaakt. Wat overblijft zijn fotonen met een horizontale polarisatie. Het volgende diagram laat de hele meetproces met de drie filters zien:



Bij iedere stap gaat de intensiteit van het licht om de helft naar beneden. Op het scherm rechts is de intensiteit daarom nog $1/8$ van de oorspronkelijke intensiteit I_0 . De intensiteit is dus niet nul.

Het volgende plaatje laat drie stukjes polarisatiefilter op een lichtplaat zien. De lichtplaat produceert ongepolariseerd licht. De filters H en V hebben een horizontale respectievelijk verticale oriëntatie. De filter D ligt tussen de filters H en V onder een hoek van 45° :



Op de plekken waar alleen H en V elkaar kruisen komt er duidelijk geen licht meer doorheen. Daarentegen zie je dat waar de filters H, D en V over elkaar liggen wel nog licht doorheen komt.

Het filmpje <https://www.youtube.com/watch?v=GolGhjitd0s> toont ook dit effect met behulp van drie ronde polarisatiefilters. Eerst zie je alleen een filter. Dan wordt een tweede filter zo gedraaid dat er geen licht meer doorheen komt. De derde filter wordt dan tussen de twee gekruiste filters geschoven. Opeens is er weer licht. We begrijpen nu waarom.

5 Literatuur en weblinks

Boeken:

- Frank Verstraete en Céline Broeckaert:
Waarom niemand kwantum begrijpt
- Florian Aigner:
Warum wir nicht durch Wände gehen
- Thomas de Padova:
Een eeuw van licht

Gebruikte leds voor de meting van de constante van Planck:

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-rood-2v.html>

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-oranje-2v.html>

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-geel-2v.html>

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-groen-geel-2v.html>

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-groen-3v.html>

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-blauw-3v.html>

<https://www.otronic.nl/nl/10x-led-diode-transparant-5mm-ultraviolet-3v.html>

Lezing van Walter Lewin:

Quantization and Heisenberg's Uncertainty Principle

<https://www.youtube.com/watch?v=MeK0DV329mU>

Three-Polarizer Paradox:

https://www.informationphilosopher.com/solutions/experiments/dirac_3-polarizers/

<https://faculty.csbsju.edu/frioux/polarize/POLAR-sup.pdf>

<https://www.youtube.com/watch?v=MzRCDLre1b4>

Tool voor de animatie van golven:

<https://emanim.szialab.org/index.html>