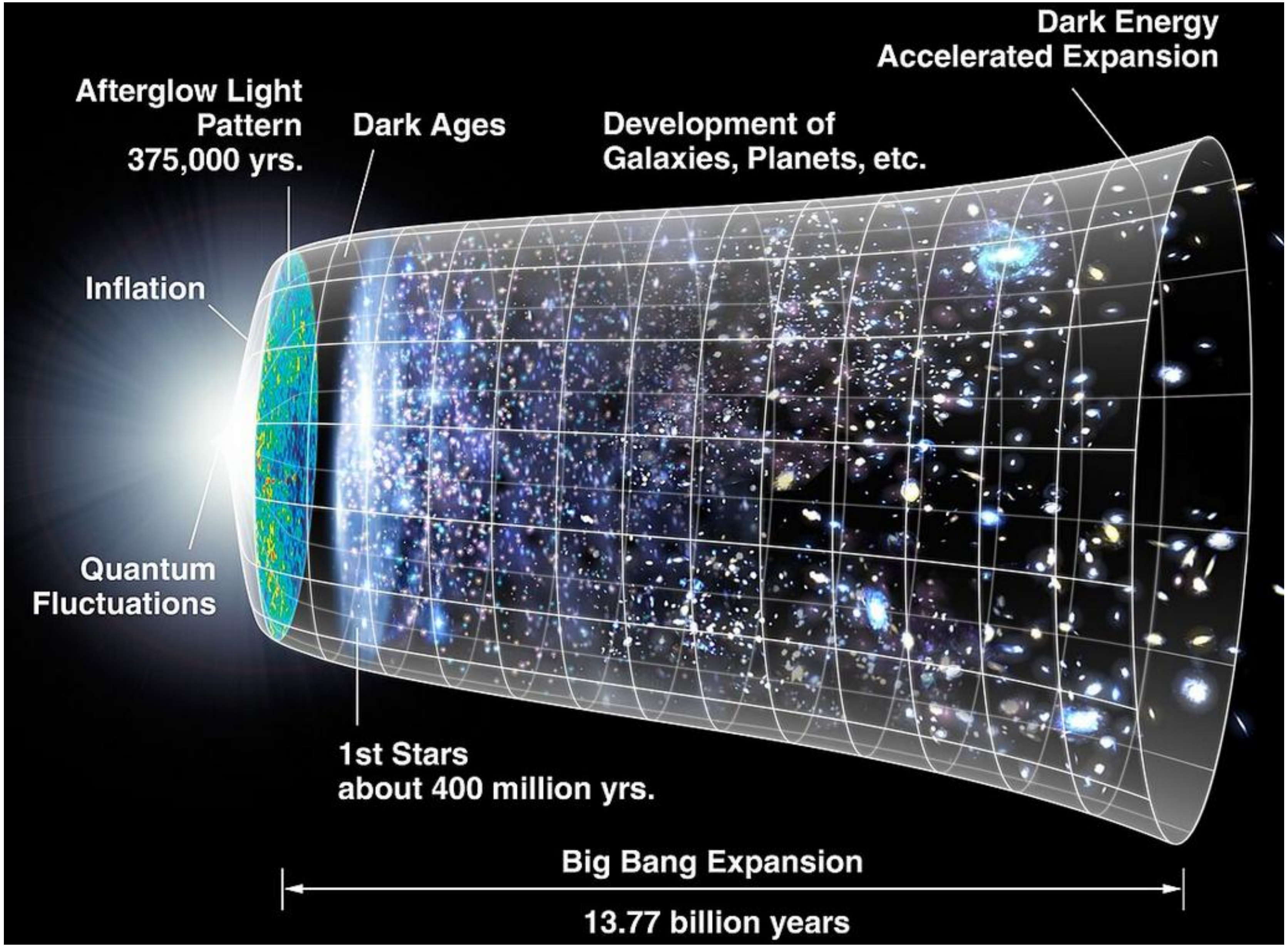
Quantumveldentheorie

Daedalus workshop Fred van der Voort 2-6-2026



Oerknal-nucleosynthese? **Vacuümquantumfluctuaties?**

Quantumveldentheorie

quantum-velden-theorie

- theorie: natuurkundige theorie

    Wat? Verklaring? Beschrijving (incl. voorspelling)

    Hoe? Wiskunde (compact en elegant: één formule voor alles)

- klassieke theorieën (Newton, Einstein)

- klassieke veldentheorie (Maxwell)

- quantummechanica

- quantumveldentheorie

Drie wetten van Newton:

1) Traagheidswet (Galileï)

2) $\mathbf{F}$ = m$\mathbf{a}$ (of, algemener, $\mathbf{F}$ = d$\mathbf{p}$/dt (met $\mathbf{p}$ = m$\mathbf{v}$)

3) $\mathbf{F}_{actie} = - \mathbf{F}_{reactie}$

(“4de wet van Newton”: gravitatiewet: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$)

(werking op afstand ☹)

Wet van behoud van impulsmoment ($d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$);

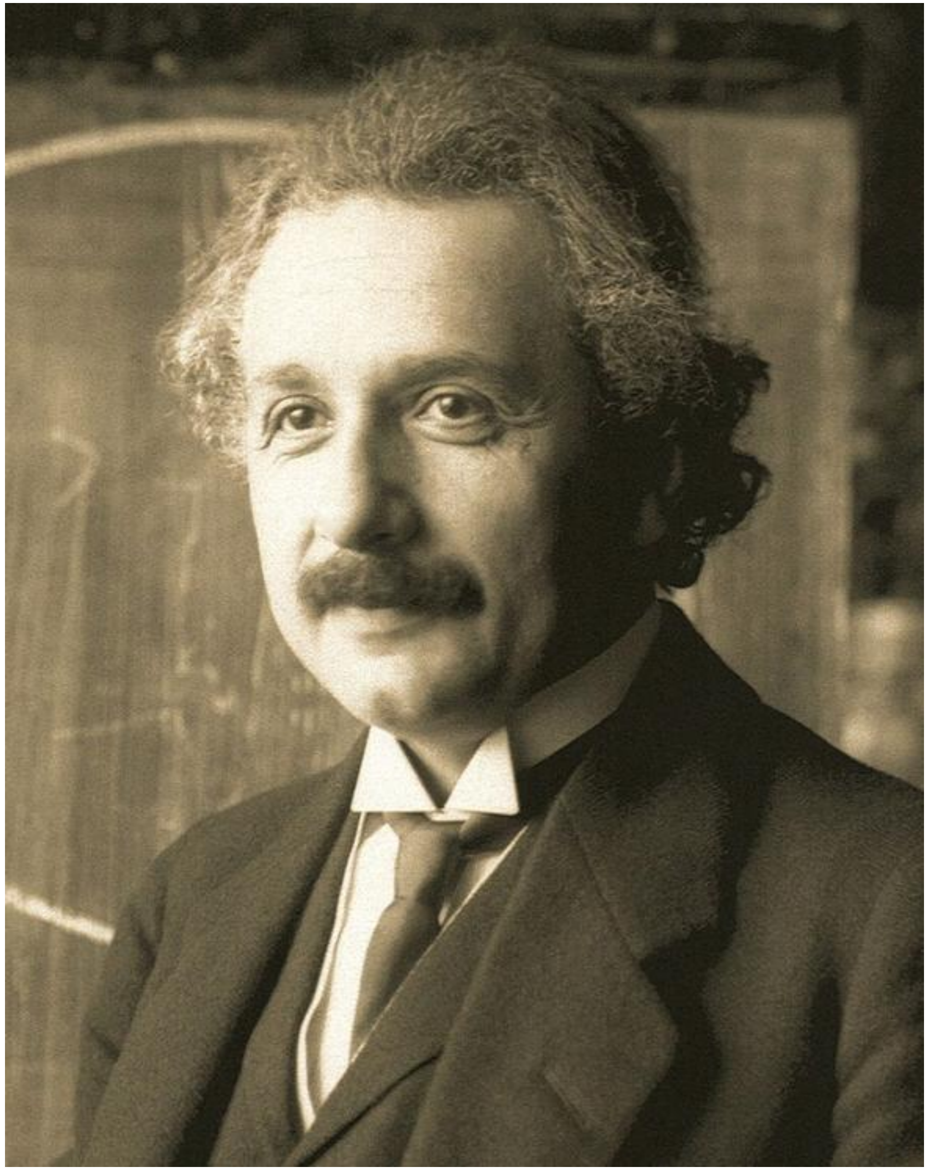
Wet van behoud van impuls ($d\mathbf{p}/dt = \mathbf{0}$); en

, zie ook de eerste hoofdwet van de klassieke thermodynamica,

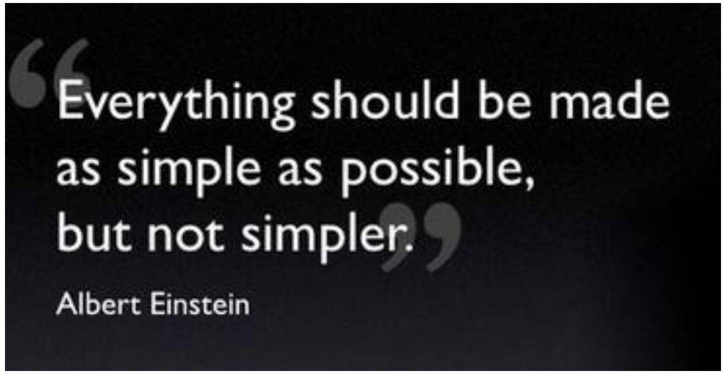
Wet van behoud van energie ($d(E(=T + V))/dt = 0$)

Voor verschijnselen met snelheden in de buurt van de lichtsnelheid schieten de wetten van Newton tekort → relativiteitstheorie!

Albert Einstein 1879 - 1955



(In 1921)



Speciale relativiteitstheorie

Twee postulaten van Einstein:

1) De lichtsnelheid is in elk inertiaalstelsel gelijk ($c \approx 3 \times 10^8$ m/s)

2) In elk inertiaalstelsel gelden dezelfde natuurwetten

Speciale relativiteitstheorie

Uit v = c in elk inertiaalstelsel volgt de Lorentztransformatie die het

verband beschrijft tussen de coördinaten (t, x, y, z) van het ene

inertiaalstelsel en de coördinaten (t’, x’, y’, z’) van het andere stelsel.

(t, x, y, z) heet “4-vector” en wordt ook wel als (x_0, x_1, x_2, x_3) *genoteerd of korter:* x_μ

De Lorentztransformatie vervangt dus de Galileïtransformatie:

Speciale relativiteitstheorie

Galileïtransformatie: $\boldsymbol{x' = x - v \cdot t}$ *en* $\boldsymbol{t' = t}$

Lorentztransformatie: $x' = \dfrac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ en $t' = \dfrac{t - \dfrac{v \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

NB: Merk op dat in SR plaats en tijd op gelijk niveau zijn.

Speciale relativiteitstheorie

Einstein's tweede postulaat:

In elk inertiaalstelsel gelden dezelfde natuurwetten

Een natuurwet of theorie die geldig is alle inertiaalstelsels heet **Lorentz-invariant**.

Speciale relativiteitstheorie

Je wilt dus wetten hebben die in elk inertiaalstelsel gelden. Dus moeten deze wetten opgebouwd zijn uit **Lorentz-invariante** componenten.

Bijvoorbeeld de lichtsnelheid c en de rustmassa m

De 4-vector x_μ heeft de eigenschap dat het inproduct van twee 4-vectoren **Lorentz-invariant** is:

dus $x_\mu \cdot x^\mu = x'_\mu \cdot x'^\mu$

(met $x_\mu \cdot x^\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_0{}^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2$) (en c=1)

Speciale relativiteitstheorie

maar ook $\partial_\mu \, \partial^\mu$, (met $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ en $\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3$)

en speciale combinaties van spinoren Ψ, tensoren (e.g.

Minkowski matrix $\eta_{\mu\nu}$) en/of velden φ zijn **Lorentz-invariant**

Lagrangiaan L

$$S = \int L \, \mathrm{d}t$$ met $L = T - V = E_{kin} - E_{pot}$

Minimaliseren van S (traject van minste actie) geeft de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

en daarmee kan je de bewegingsvergelijkingen afleiden.

Bijvoorbeeld: $L = ½m\dot{x}^2 - V(x)$

Dan is de bewegingsvergelijking: $-\partial/\partial x(V(x)) - m\ddot{x} = F - ma = 0$

Is de 2de wet van Newton!

Emmy Noether 1882 - 1935

Lagrangiaan L

Theorema van Noether:

Elke continue **symmetrie** van de Lagrangiaan (invariante action S) leidt tot een corresponderende behoudswet:

Bijv.: systeem verandert niet als je het tijdstip verandert
-> wet van behoud van energie

systeem verandert niet als de locatie verandert
-> wet van behoud van impuls

systeem verandert niet als je het systeem draait
-> wet van behoud van impulsmoment

Lagrangiaan L

Theorema van Noether illustreert dat uitgaande van een gegeven Lagrangiaan alle bewegingsvergelijkingen en behoudswetten zijn af te leiden.

Het maakt het mogelijk om, uitgaande van gewenste **symmetrieën**, d.w.z. gewenste behoudswetten, de passende Lagrangiaan voor een systeem te vinden.

Helpt bij het vinden van nieuwe natuurkundige theorieën, bijv. het Standaardmodel en het vereenvoudigt ook uitrekenen van de bewegingsvergelijkingen.

Lagrangiaan L

Als de action S (of de Lagrangiaan L) hetzelfde blijft na een Lorentztransformatie, dan zijn de bewegingsvergelijkingen (d.w.z. de bijbehorende natuurwetten) **Lorentz-invariant**!

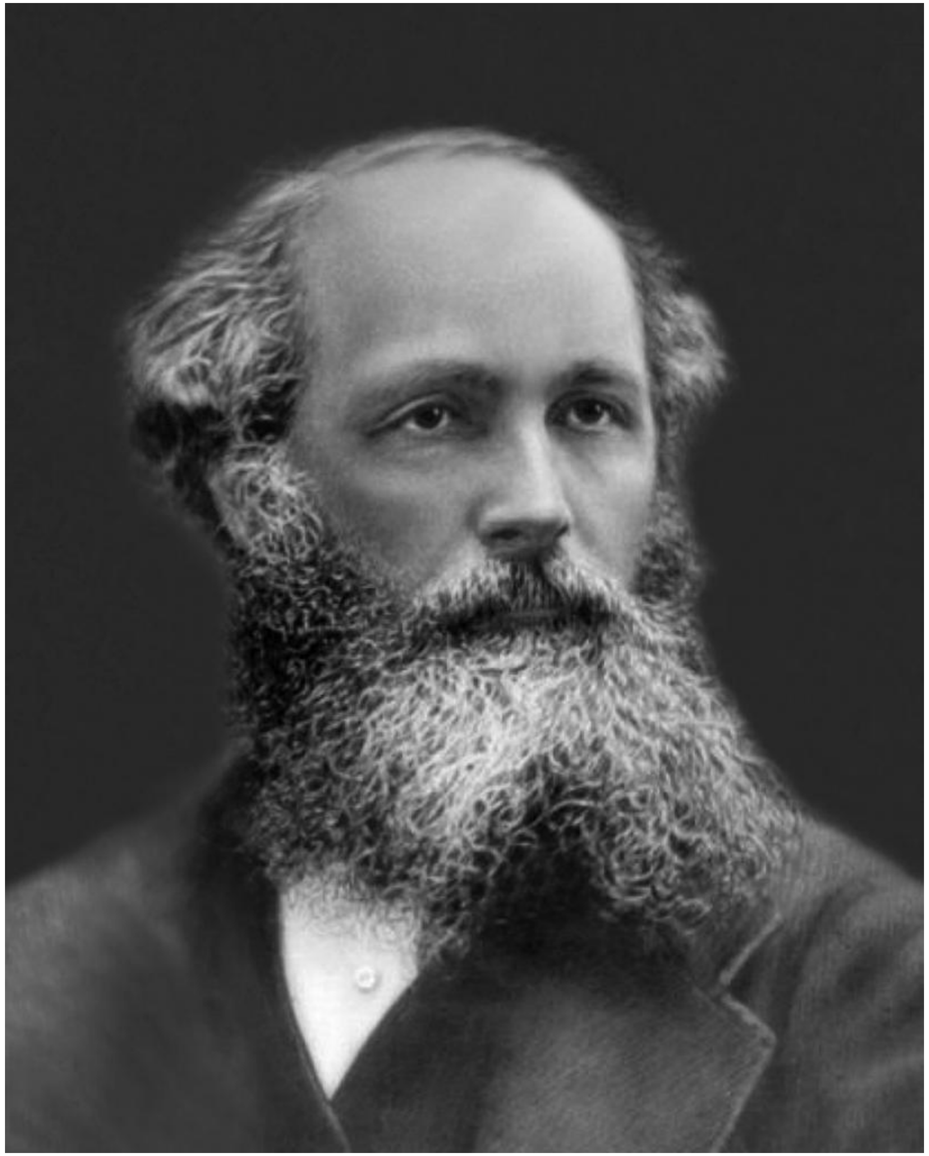
Veldentheorie

Wat is een veld?

Voorbeelden: gravitatieveld, elektrische en magnetische velden, maar ook temperatuur op verschillende plaatsen in een ruimte.

Voor elektrische en magnetische velden:

de Maxwell-veldvergelijkingen



James Clerk Maxwell 1831 - 1879

Veldentheorie

Maxwell's field equations:

$$F_{el} = f \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Gauss's law (incl. wet van Coulomb)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$ Gauss's law for magnetism

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ Faraday's law

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$ Ampère-Maxwell law

Veldentheorie

De Maxwellvergelijkingen vormen één theorie voor elektriciteit, magnetisme, en elektromagnetische straling (incl. licht) ☺

Lorentzkracht: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ volgt uit de Lagrangiaan ☺

👍 Geen werking op afstand dankzij lokale interactie met velden!

👍 De Maxwellveldvergelijkingen zijn ook **Lorentz-invariant**!

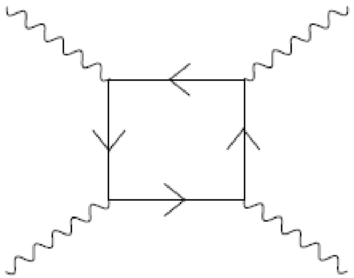
$$\Box A^\mu = \mu_0 J^\mu \qquad \mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

Veldentheorie

Tekortkomingen van de Maxwellvergelijkingen:

Geen beschrijving voor, o.a.:

- fotonen, incl. foton-fotonverstrooiing:



- quantumverstrengeling van EM-velden; en
- het foto-elektrische effect.

Quantummechanica

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$$

Schrödinger Equation (Time-Dependent)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

Schrödinger Equation (Time-Independent)

QM is niet compatibel met relativiteitstheorie

Quantummechanica

Quantummechanica beschrijft alleen de eigenschappen/toestanden van **bestaande** deeltjes.

Schrödingervergelijking beschrijft (in termen van waarschijnlijkheden) de toestand van **één** deeltje (met onzekere plaats en impuls), bijv. een elektron langzaam draaiend om een proton in een waterstofatoom.

Quantummechanica

In QM is het foton een afgeleid product, anders dan het elektron.

Het foton beweegt zich met de lichtsnelheid, maar QM beschrijft geen relativistische deeltjes.

Spin en Pauliverbod worden *ad hoc* toegevoegd ☹

Verschijnsel	Groot	Klein
Langzaam	Klassieke Newtonse mechanica	Langzaam bewegend elektron om proton in een waterstofatoom -> geen speciale relativiteitstheorie nodig, wel quantummechanica
Snel	Raket met bijna lichtsnelheid -> geen QM nodig, wel speciale relativiteitstheorie	Zowel QM als SR nodig!

Eerste poging om tot een nieuwe theorie te komen die QM en SR met elkaar samenbrengt:

Schrödingervergelijking:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathrm{H}}\Psi$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

Hoe maak je de Schrödingervergelijking **Lorentzinvariant**?

Differentieer de Schrödingervergelijking nog een keer naar de tijd (met $\hat{H}$ onafhankelijk van t, en $\hbar$ = 1):

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}\hat{H}|\psi(t)\rangle = \hat{H}^2|\psi(t)\rangle$$

Uit speciale relativiteitstheorie: $E = \sqrt{(p^2 + m^2)}$ (we kiezen c=1)

Dus je wilt dat deze E een eigenwaarde wordt van $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$, lukt met $\hat{H}^2 = \hat{p}^2 + m^2$ en eigenvector $|p\rangle$

Klein-Gordon vergelijking

met $\langle \mathbf{x}|\hat{p}^2|\psi(t)\rangle = -\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t)$ (want $\hat{p} = -i\hbar\nabla$) volgt dan:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right]\Psi(\mathbf{x},t) = 0$$ oftewel:

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\Psi(\mathbf{x},t) = 0$$ oftewel $$\left(\Box + m^2\right)\psi = 0$$

Dit is de **Lorentzinvariante** Klein-Gordon vergelijking voor een vrij, relativistisch deeltje met massa m

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Klein-Gordon vergelijking

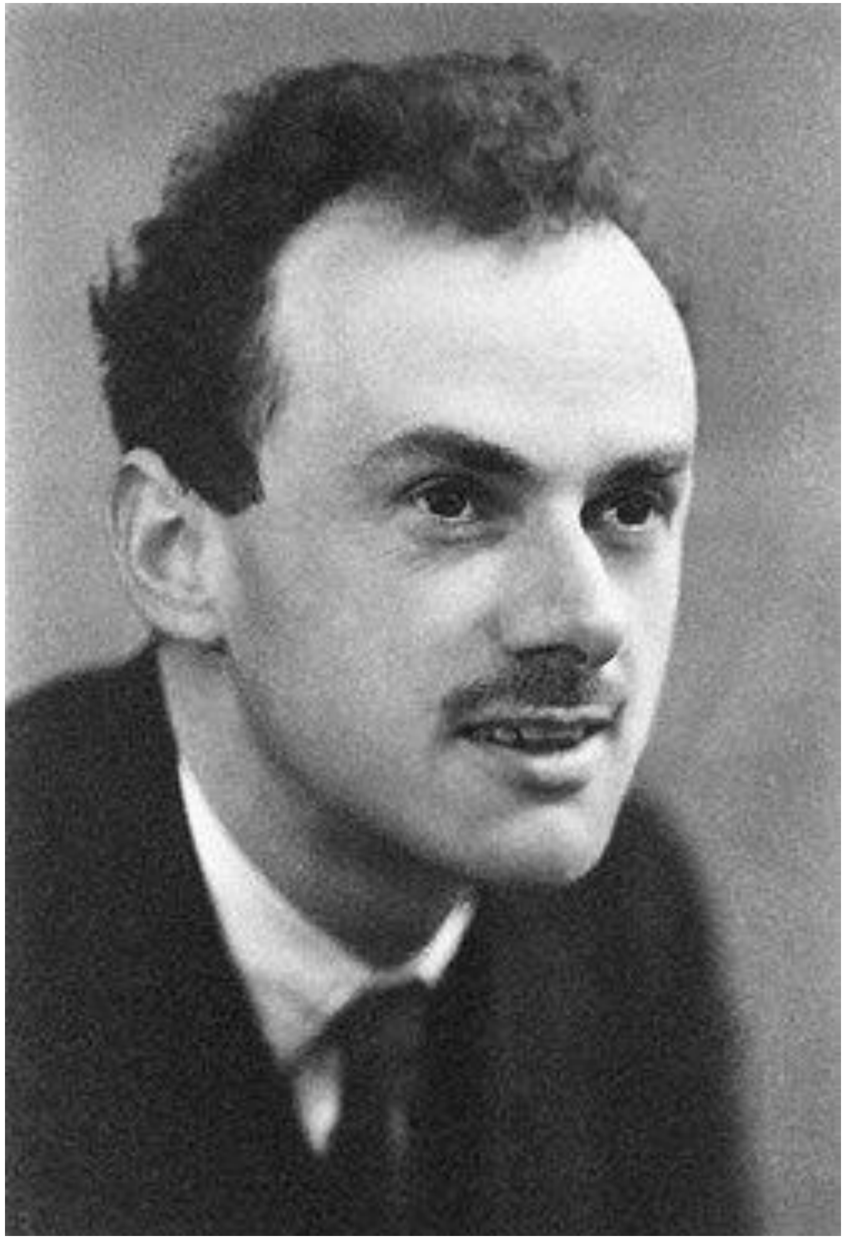
Echter:

In QM is de waarschijnlijkheidsdichtheid $\Psi^*\Psi$ (uiteraard) altijd positief.

Maar voor $\Psi^*\Psi$ volgens de Klein-Gordon vergelijking geldt dit niet!

Bovendien beschrijft de KG-vergelijking nog altijd één deeltje en geen creatie van deeltjes uit energie

Beschrijft ook geen spin ½ deeltjes, zoals in QM, maar alleen bosonen (deeltjes met heeltallige spin)



(In 1933)

Paul Dirac 1902 -1984

“A physical law
must possess
mathematical beauty”

Dirac vergelijking

De Dirac vergelijking: $$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(\mathbf{x},t) = 0$$

ook wel geschreven als $$(\mathbf{i}\not{\partial} - \mathbf{m})\psi = 0$$

Is een 1ste graadsvergelijking met Ψ(**x**,t) als speciale 4-vector ("spinor")

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\ \left(i\,\not{\partial} - m\right)\ \psi(x)$$

Dirac vergelijking

Pluspunt: $\rho = \Psi^{\dagger}\Psi$ is positief en kan als waarschijnlijkheidsdichtheid worden geïnterpreteerd
(met $\Psi^{\dagger}$ de hermitisch geconjugeerde van Ψ, d.w.z. $\Psi^{\dagger} = (\Psi^{*})^{T}$)

Voorspelt zgn. antideeltjes (e.g. positrons) die later inderdaad zijn waargenomen!

Beschrijft deeltjes met spin (waarde ½ rolt eruit), bijv. het elektron

Het Pauliverbod rolt ook uit de theorie ☺

Dirac vergelijking

Tekortkomingen:

Voorspelt een magnetisch moment van het elektron met spinfactor van precies 2. Gemeten waarde ligt echter iets hoger ☹

Geen verklaring voor de Lamb shift (kleine spectrale verschuivingen tussen $2S_{1/2}$ en $2P_{1/2}$ energieniveaus t.o.v. elkaar in het waterstofatoom) ☹

En beschrijft nog altijd geen creatie van deeltjes uit energie,
of annihilatie van deeltjes ☹

Quantumveldentheorie (QFT)

is de oplossing! ☺

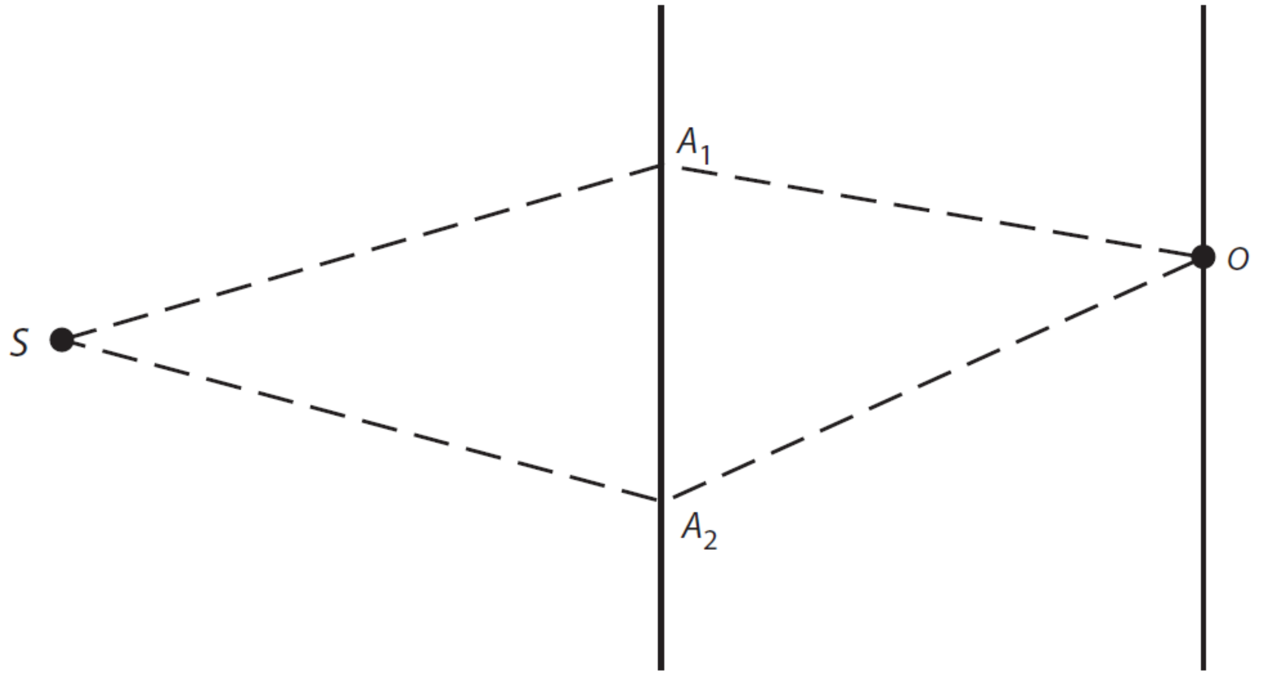
QFT combineert QM met SR én geeft correcte beschrijvingen.

Vraag: Waarom **velden**- en geen **deeltjes**theorie?

- Met velden kan je een lokale theorie maken

- Elektromagnetische velden beschrijven met deeltjes past niet bij het golfkarakter van deeltjes, zie het twee-spleten experiment:

Twee-spleten experiment



Op het scherm zie je interferentie tussen lichtgolven die van beide spleten afkomen;
Hetzelfde gebeurt als i.p.v. lichtgolven elektronen successievelijk worden afgeschoten naar het scherm https://youtu.be/ZqS8Jjkk1HI

Oplossing: deeltjes zijn ook velden, preciezer: gekwantiseerde veldexcitaties!

Quantumveldentheorie

Een “deeltje” beschrijf je in QFT als een rimpeling (excitatie) van het bijbehorende veld, bijvoorbeeld een elektronveld, een fotonveld, een quarkveld, etc. Zo’n excitatie noemen we hierna voor het gemak toch een **deeltje**. Het veld strekt zich uit over de gehele ruimte!

Vergelijk: strak gespannen laken = veld (is er altijd en overal)
rimpeling in het laken = “deeltje” (dat is wat je waarneemt)

Er zijn dus geen op zichzelf staande deeltjes meer in QFT!
Of beter gezegd helemáál geen deeltjes meer!

Quantumveldentheorie

QFT beschrijft **alle** elementaire deeltjes, bijv. elektron of foton, op **dezelfde** manier, namelijk als lokale excitaties van een bijbehorend quantumveld, waarbij elke excitatie hetzelfde is.

Hieruit volgt dat alle deeltjes van hetzelfde type, hoe jong (nu) of oud (13 miljard jaar) dan ook, ononderscheidbaar zijn!

Krachten zijn interacties tussen quantumvelden of veldmodi (lokaal!). Interacties worden aanschouwelijk gemaakt als uitwisselingen van “virtuele deeltjes”.

Quantumveldentheorie

In QFT blijkt dat het aantal deeltjes niet behouden **kan** zijn.

Heisenberg: $\Delta p > \hbar/L$, --> relativistische snelheden: $\Delta E > \hbar c/L$
Nu is $E = mc^2$. Als $\Delta E > 2mc^2$: creatie van deeltje + antideeltje (deeltjes-paar) uit het vacuüm, bijv. $e^- \rightarrow 2e^- + e^+$

Je kunt niet meer spreken van één deeltje in een box als L kleiner is dan orde-grootte $\hbar/mc$ (Compton wavelength).

QFT leidt dus tot een theorie die (d.m.v. velden) ook het ontstaan en het verdwijnen van deeltjes beschrijft ☺

Quantumveldentheorie

In QFT is een deeltje dus omgeven zijn door een zwerm van deeltjes-paren (deeltjes + antideeltjes), incl. fotonen, die voortdurend ontstaan en weer verdwijnen (vacuümfluctuaties!).

Het vacuüm is niet leeg!

Quantumveldentheorie

QFT combineert niet alleen QM en SR maar beschrijft ook op juiste wijze:

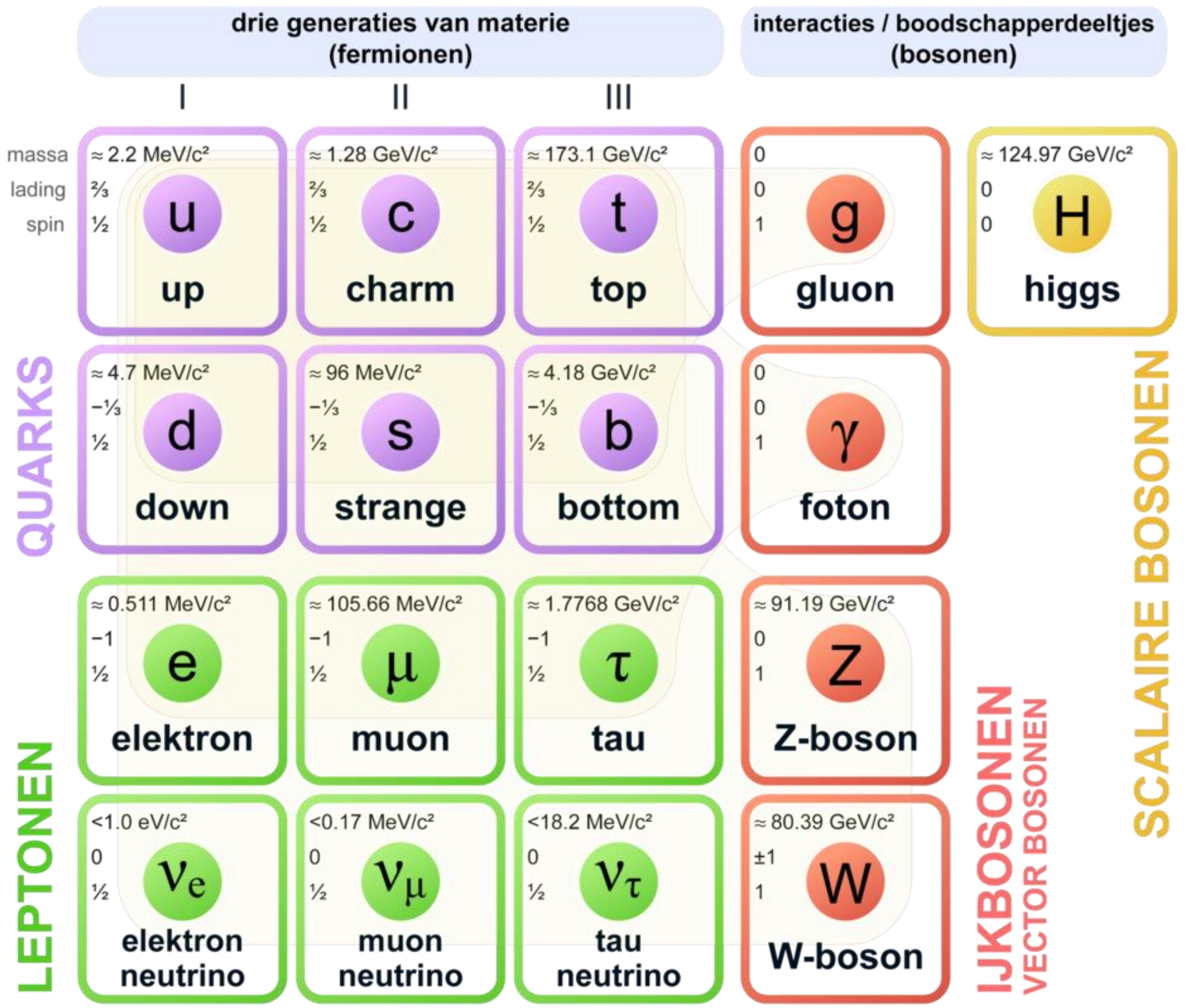
- interactie tussen geladen deeltjes en interactie tussen licht en geladen deeltjes (quantumelektrodynamica (QED)) (chemie, materiaalkunde);

- zwakke wisselwerking (radioactief β⁻verval: $\mathrm{n}^0 \longrightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$))

- sterke wisselwerking (quantumchromodynamica (QCD)) (protonen trekken elkaar aan!).

Het Standaardmodel van de deeltjesfysica is ook een QFT:

Standaardmodel van de Elementaire Deeltjes



Quantumveldentheorie

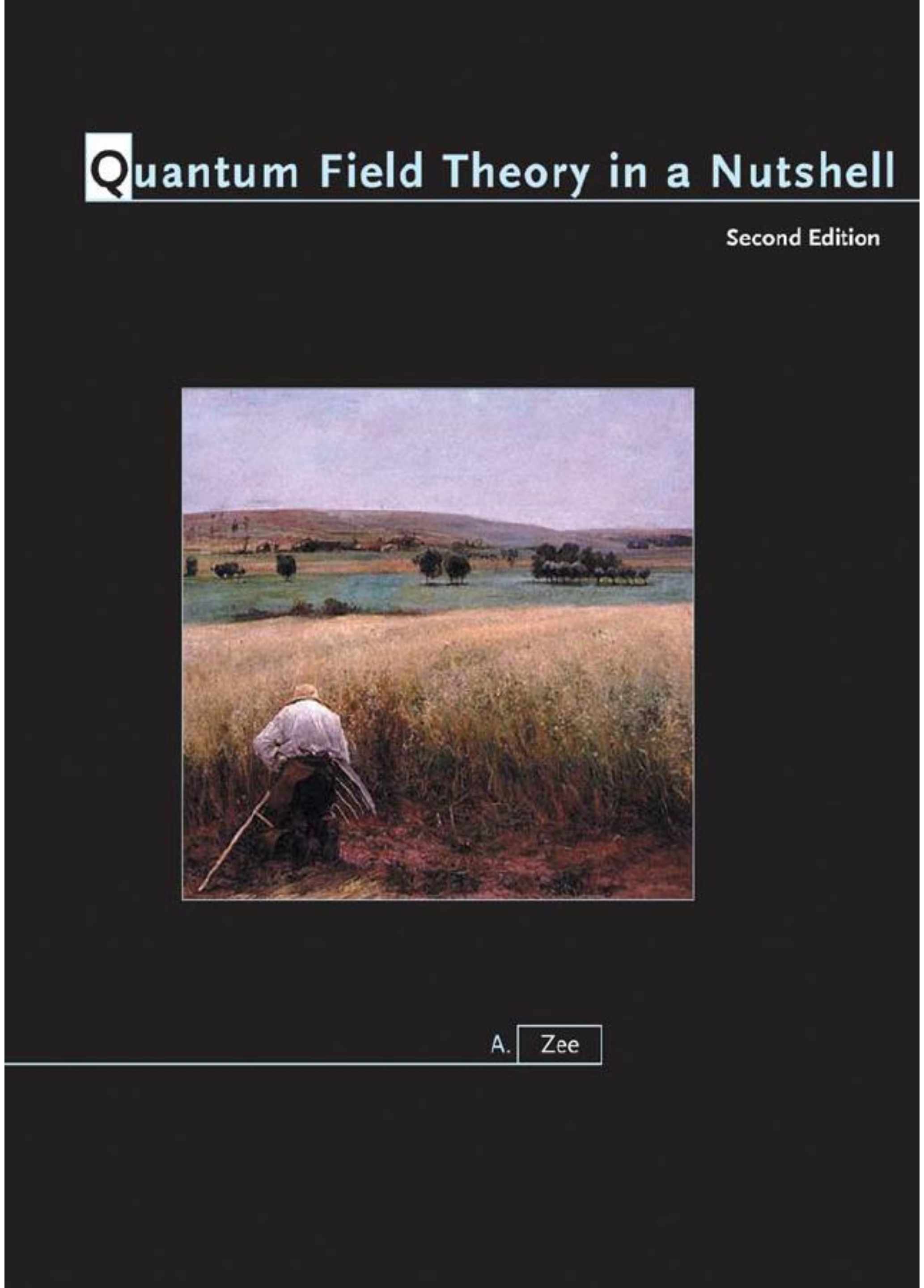
Pauliverbod voor halfwaardige spindeeltjes volgt ook uit QFT

(de twee-deeltjes toestand verandert met minteken bij verwisseling en dus is $|\vec{p}, r; \vec{p}, r\rangle = 0$*) (*$\vec{p}$ *= impuls, r = spin)*

Zelfs gravitatie lijkt met QFT te kunnen worden beschreven (supersymmetrie, string theory)

Maar hoe kom je op zo'n quantumveldentheorie?

PAUZE


Quantum Field Theory in a Nutshell
Second Edition
A. Zee

Quantumveldentheorie

Twee manieren om tot quantumveldentheorie te komen:

1) **Padintegraalformalisme:**
   Een enorme optelsom van waarschijnlijkheidsamplitudes uit de quantummechanica, maar dan voor een heel veld i.p.v. één deeltje.

2) **Canonieke quantisatie** (ook wel **2de quantisatie**)
   In quantummechanica werden plaats (x) en impuls (p) operatoren ($\hat{x}$, $\hat{p}$).
   In QFT worden klassieke velden (bijv. E, B, A, ...) en zgn. materievelden φ operatoren ($\hat{A}$, $\hat{\varphi}$), die weer in termen van creatie- en annihilatie-operatoren kunnen worden geschreven, die creatie en annihilatie van deeltjes beschrijven.

Eerst nog: Uit de quantummechanica weten we:

Schrödingervergelijking: $$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

Oplossing SV: $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \, |\Psi(t_0)\rangle$

Transition amplitude: $$\langle x_t | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x_0 \rangle$$

= overgangswaarschijnlijkheidsamplitude om van toestand $|x_0\rangle$ op t = 0 naar toestand $|x_t\rangle$ op tijdstip t te komen

Dirac:

Transition amplitude om van begintoestand I (initial) naar eindtoestand F (final) te komen op t =T kan je,

als $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{q})$

schrijven als:

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int Dq(t)\, e^{i\int_0^T dt[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)]}$$

(met "q" de gegeneraliseerde coördinaat (bijv. de plaats "x" van een deeltje) en met $\hbar = 1$)

De term: $e^{i \int_0^T dt[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)]}$

kan je ook schrijven als: $e^{i \int_0^T dt\, L(\dot{q}, q)}$ = $e^{i S(q)}$

met L de Lagrangiaan en S de action!

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int Dq(t)\, e^{i \int_0^T dt[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)]}$$

Interpretatie van Feynman: **padintegraal**

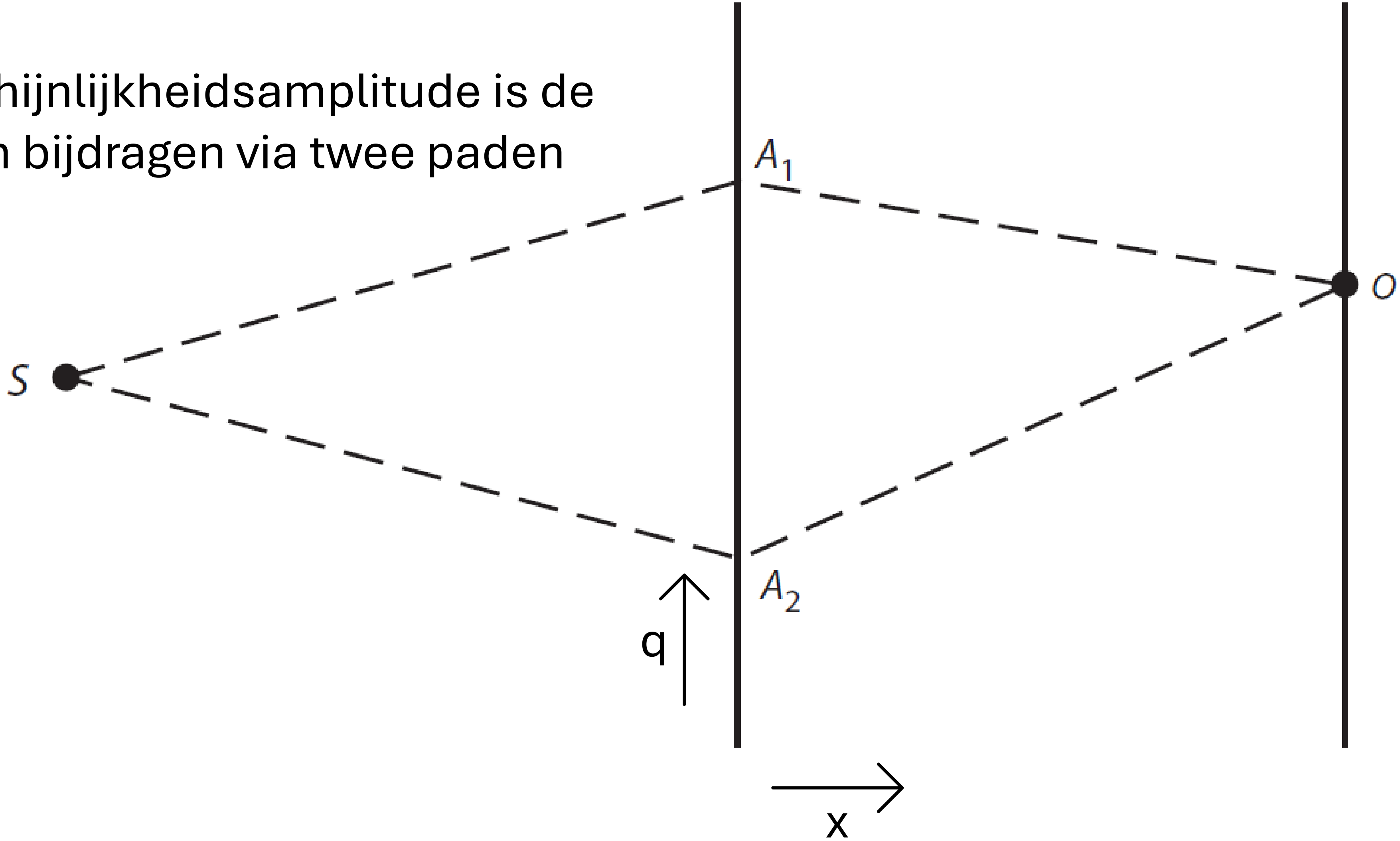
Je integreert over **alle** mogelijke paden: $\int Dq(t)$

met voor elk pad een "weegfactor": $e^{i \int_0^T dt[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)]}$

Twee spleten experiment revisited

Eén tussenscherm met twee spleten:

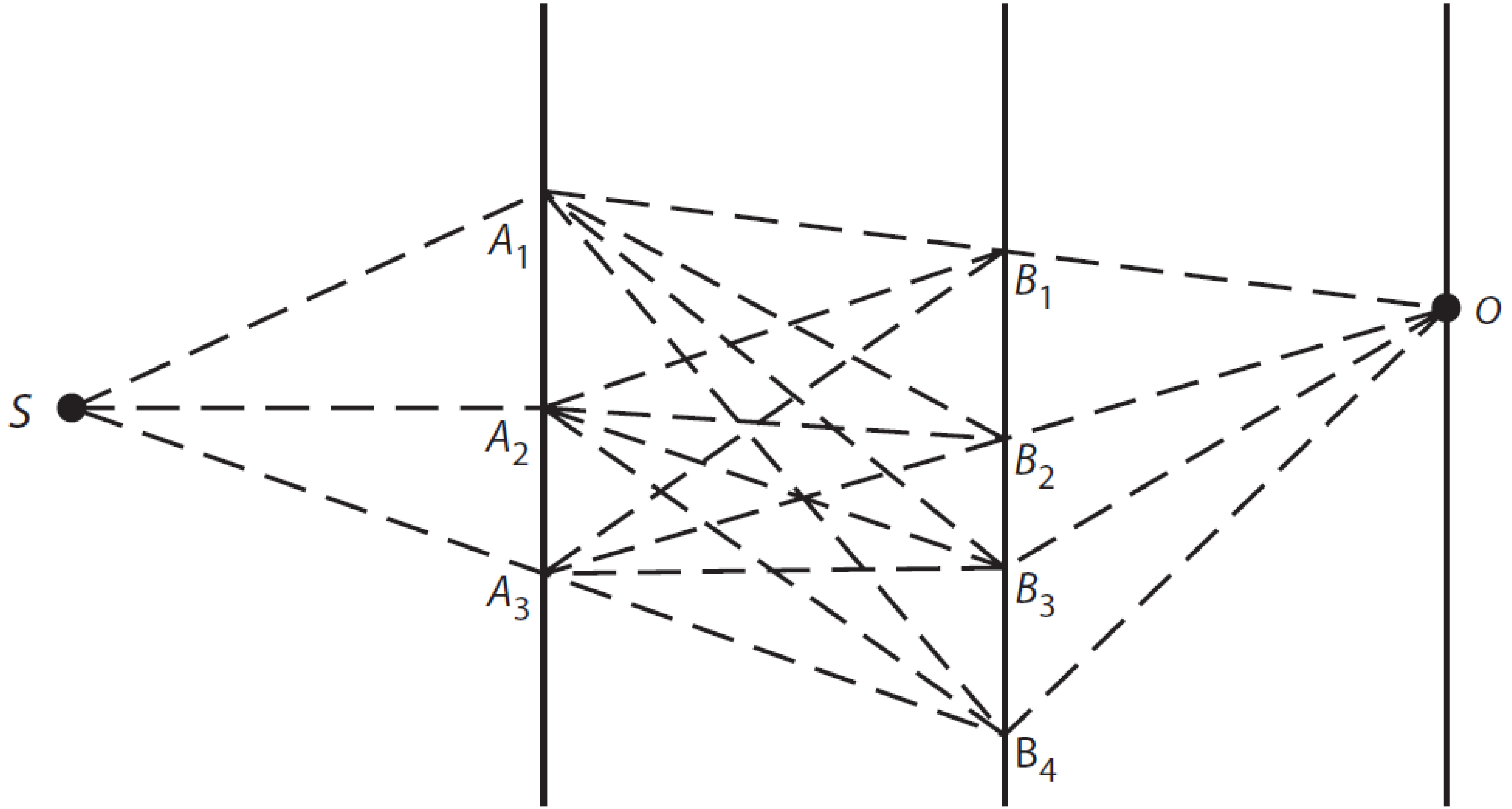
Waarschijnlijkheidsamplitude is de som van bijdragen via twee paden



Met “q” de uitwijking (d.w.z. waar de spleet zit) op het tussenscherm op plaats x

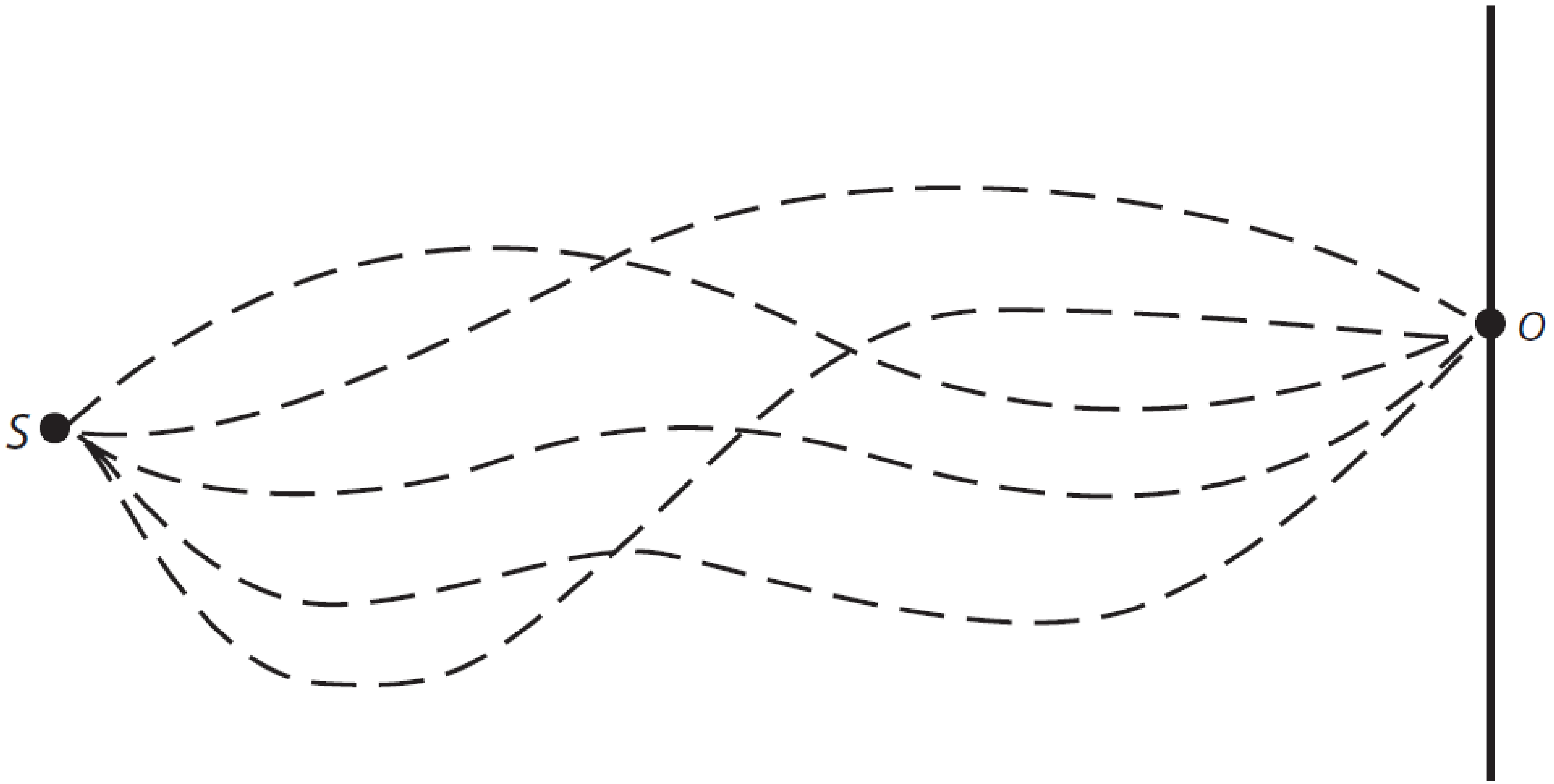
Twee tussenschermen met drie, resp. vier spleten:

Waarschijnlijkheidsamplitude is de som van bijdragen via twaalf paden:



Oneindig veel tussenschermen met oneindig veel spleten:

Waarschijnlijkheidsamplitude is de oneindige som van bijdragen via oneindig veel paden:



Het voorgaande was gebaseerd op QM voor één deeltje

Uitbreiding naar meer deeltjes (met q_i de gegeneraliseerde coördinaten van de deeltjes 1 t/m N):

$$\hat{H} = \sum_a \frac{1}{2m_a}\hat{p}_a^2 + V(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots, \hat{q}_N)$$

(a = 1, 2, ..., N) en

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_N) = \sum_{ab} \frac{1}{2} k_{ab}(q_a - q_b)^2 + \cdots$$

Limietgeval: oneindig veel deeltjes dicht bij elkaar, vervang q(x,t) door veld ϕ(x,t) (ook genoteerd $\varphi(x)$ met 4-vector *x*) :

$$(q_a - q_b)^2 \simeq l^2(\partial\varphi/\partial x)^2$$

$$S(q) \rightarrow S(\varphi) \equiv \int_0^T dt \int d^2x \mathcal{L}(\varphi)$$

i.g.v. 2 dim.

$$\sum_a \tfrac{1}{2} m_a \dot{q}_a^2 \rightarrow \int d^2x \tfrac{1}{2}\sigma(\partial\varphi/\partial t)^2$$ i.g.v. 2 dim.

$$S = \int d^dx \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{g}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \cdots\right]$$ i.g.v. d=D+1

d.w.z. met V als Taylorreeks in φ

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^d x (\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi))}$$

Is **Lorentzinvariant**! ($\phi(x)$ is functie van x_μ)

Maar integraal is niet te doen, behalve als $V(\phi) = m^2\phi^2$,
d.w.z. met een harmonische benadering van $V(\phi)$,
(Gaussische integralen en Green's functies)

Harmonische benadering: $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2]$

Schrijf φ uit in zijn Fourier componenten:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \phi(\vec{p},t)$$

dan is $\mathcal{L}(\varphi) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad \frac{\dot{\varphi}\,\dot{\varphi}}{2} - (p^2 + m^2)\, \frac{\varphi\,\varphi}{2}$

Vgl. harmonische oscillator: $L = \dot{x}^2 - \omega^2 x^2$ met $\omega^2 = p^2 + m^2$

Dus: een quantumveld is een oneindige set van harmonische oscillatoren (trillingsmodi) met frequenties:

$\omega^2 = p^2 + m^2$ (vgl. $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (met $c = 1$))

Elke Fouriercomponent correspondeert met een relativistisch deeltje met massa m, impuls p en energie E.

Canonieke Quantisatie

In quantummechanica:

met gegeneraliseerde coördinaat q
en impuls p:

$$[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = [\hat{p}^a, \hat{p}^b] = 0$$

$$[\hat{q}_a, \hat{p}^b] = i\,\delta_a^b \qquad \text{(met } \hbar = 1\text{)}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \end{aligned}\right\}$$

Geldt voor de gekwantiseerde harmonische oscillator in QM

In quantumveldentheorie:

$$[\hat{\phi}_a(\vec{x}), \hat{\phi}_b(\vec{y})] = [\hat{\pi}^a(\vec{x}), \hat{\pi}^b(\vec{y})] = 0$$

$$[\hat{\phi}_a(\vec{x}), \hat{\pi}^b(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\,\delta_a^b$$

Met ϕ het veld en π het veld-equivalent van de impuls

Canonieke Quantisatie

Klassiek veld: $$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \phi(\vec{p},t)$$

Gekwantiseerd veld:
(quantumveld) $$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right]$$

Met $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ creatie-operator en $\hat{a}_{\vec{p}}$ annihilatie-operator
Vgl.: bij de harmonische quantum-oscillator produceert een creatie-operator een hoger energieniveau: $\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
Hier een creatie van een deeltje met energie $\omega^2 = p^2 + m^2$!

Canonieke Quantisatie

$\hat{H}$ kan je dan ook in creatie- en annihilatieoperatoren uitdrukken

en daarmee de overgangswaarschijnlijkheidsamplitude

$$\langle x_t | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x_0 \rangle$$

In het geval dat $V(\phi) = m^2\phi^2$ interacteren de quantumvelden of de veldmodi of golfpakketten **niet** met elkaar. Dat gebeurt pas als er ook **en**harmonische bijdragen in V zijn, d.w.z. hogere machten dan 2 (dan wordt de bewegingsvergelijking niet-lineair).

Beschouw nu:

$$Z(J) = \int D\varphi \, e^{i \int d^4x \{\frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi\}}$$

Door Taylorreeksen voor de e-machten van J en λ te schrijven kan je lage-orde termen berekenen.

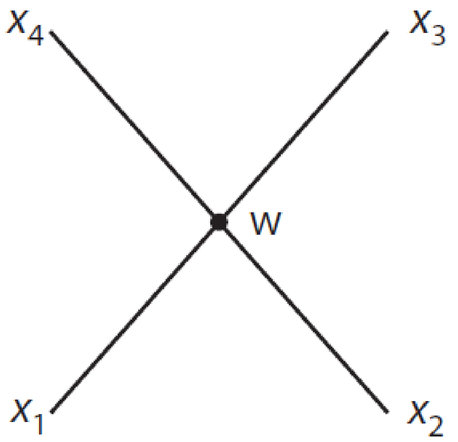
Taylorreeks, hier McLaurinreeks: $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

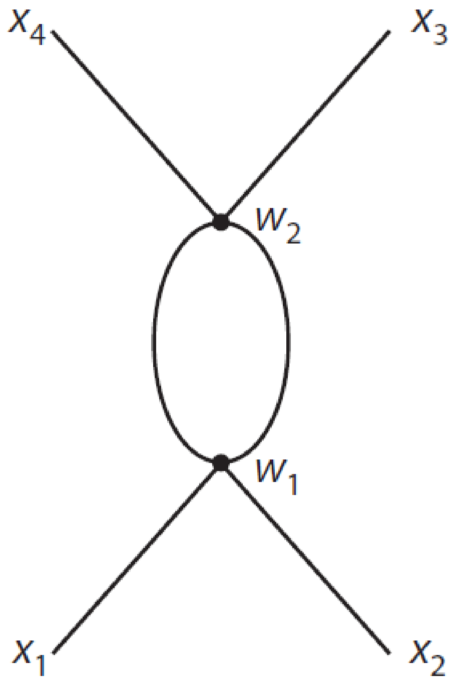
$$e^{iax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iax)^n}{n!} = 1 + iax - \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{ia^3x^3}{3!} + \frac{a^4x^4}{4!} + \dots$$

Hier met ax = $\frac{\varphi^4}{4!}$ λ, resp. ax = φJ

Het blijkt dat bijv. een term met λJ^4 een interactie beschrijft tussen twee veldfluctuaties, i.e. twee “deeltjes”. Maar hogere termen, bijv. λJ^8, doen dat ook.

Dit kan grafisch worden weergegeven met Feynmandiagrammen:





Voorbeeld: nucleonsverstrooiïng $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$

In de scalaire Yukawa theorie is de Lagrangiaan:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^\star \partial^\mu \psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \psi^\star \psi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g \psi^\star \psi \phi$$

Hiermee kan een complex scalair veld Ψ (beschrijft een nucleon) worden gekoppeld aan een reëel scalair veld ϕ (beschrijft een meson)

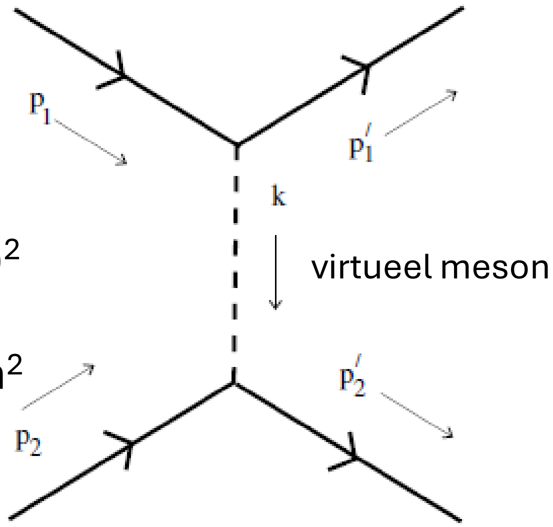
Laagste orde bijdragen: O(g^2)

$k^2 = \omega^2 - p^2$

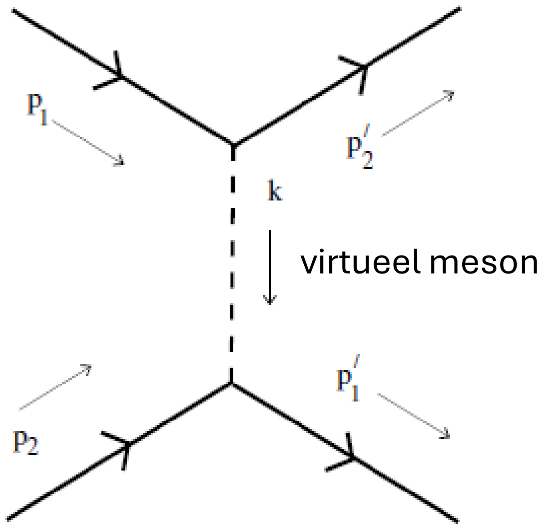
$k^2 = (p_1 - p'_1)^2$

$k^2 \neq m^2$

$\omega^2 \neq p^2 + m^2$



+

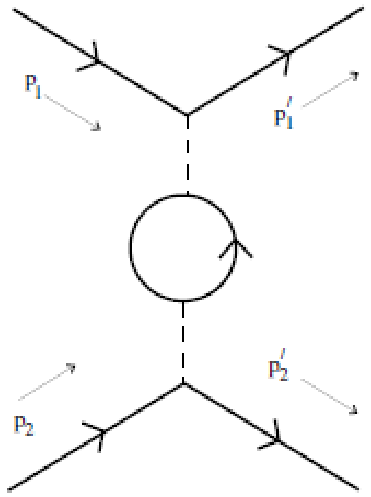


Omdat voor het meson $\omega^2 \neq p^2 + m^2$ wordt het als **virtueel** deeltje aangeduid

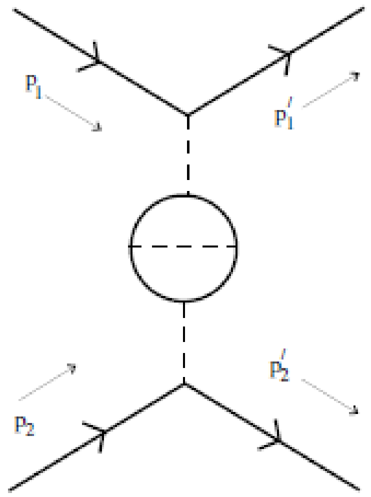
$\langle f|\, S - 1\, |i\rangle$ =

$$i(-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p_1')^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p_2')^2 - m^2}\right] (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')$$

Hogere orde bijdragen:



$\mathcal{O}(g^4)$



$\mathcal{O}(g^6)$

enz.

Als je alleen de lagere termen van de Taylorreeksen van de e-machten van λ, g en J meeneemt, moet de toegevoegde factor in de Lagrangiaan, $\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ of $g\psi^\star\psi\phi$, etc., d.w.z. de verstoring van de harmonische oplossing, klein zijn t.o.v. de andere termen.

Dit leidt ertoe dat je op deze manier alleen een **zwakke** wisselwerking tussen de velden kunt berekenen.

Dus geen **sterke** wisselwerkingen, bijv.:

- Fractionele quantum Hall effect, waarbij de lading van een elektron in breukdelen wordt opgesplitst met elk lading 1/3 e^- of 1/5 e^-, of zelfs 1/7e^-

- QCD (quantumchromodynamica)

- quantum gravitatie, holografisch principe, snaartheorie

Om hier zinvol te kunnen rekenen heb je **renormalisatie** nodig, d.w.z. het zorgvuldig eindig maken van oneindigheden in hogere Taylorreekstermen van de integraal.

Terug naar de transition amplitude:

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi)\right)}$$

φ is een scalair veld.

Met een reëel **scalair** veld φ kan je een deeltje met spin 0 beschrijven.
Bijv. een π-meson (sterke wisselwerking). Uitwisseling van een virtueel π-meson levert een aantrekkende kracht op tussen twee objecten

Met een **vector**veld ϕ_μ kan je een deeltje met spin 1 beschrijven. Bijvoorbeeld het fotonveld (elektromagnetische veld). Uitwisseling van een virtueel foton levert een afstoting op tussen twee objecten met positieve lading (en aantrekking bij tegengestelde lading)

Met een speciaal vectorveld, zgn. **spinor**veld kan je een spin ½ deeltje beschrijven. Bijvoorbeeld het elektronveld, quarkvelden *(zie volgende slide)*

Met een **tensor**veld $\phi_{\mu\nu}$ kan je het gravitonveld (gravitatie) beschrijven: uitwisseling van een graviton levert een aantrekkende kracht op tussen twee objecten

De interactie tussen het spin ½ veld (elektron) en een spin 1 veld (foton) wordt beschreven door **QED (quantumelectrodynamica)**

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i D\!\!\!\!/ - m)\psi$$

De interactie tussen het elektronveld en de vacuümfluctuaties (i.e. zwerm van virtuele fotonen) geeft de Lambverschuiving in een waterstofatoom exact weer ☺ *(zie volgende slide)*

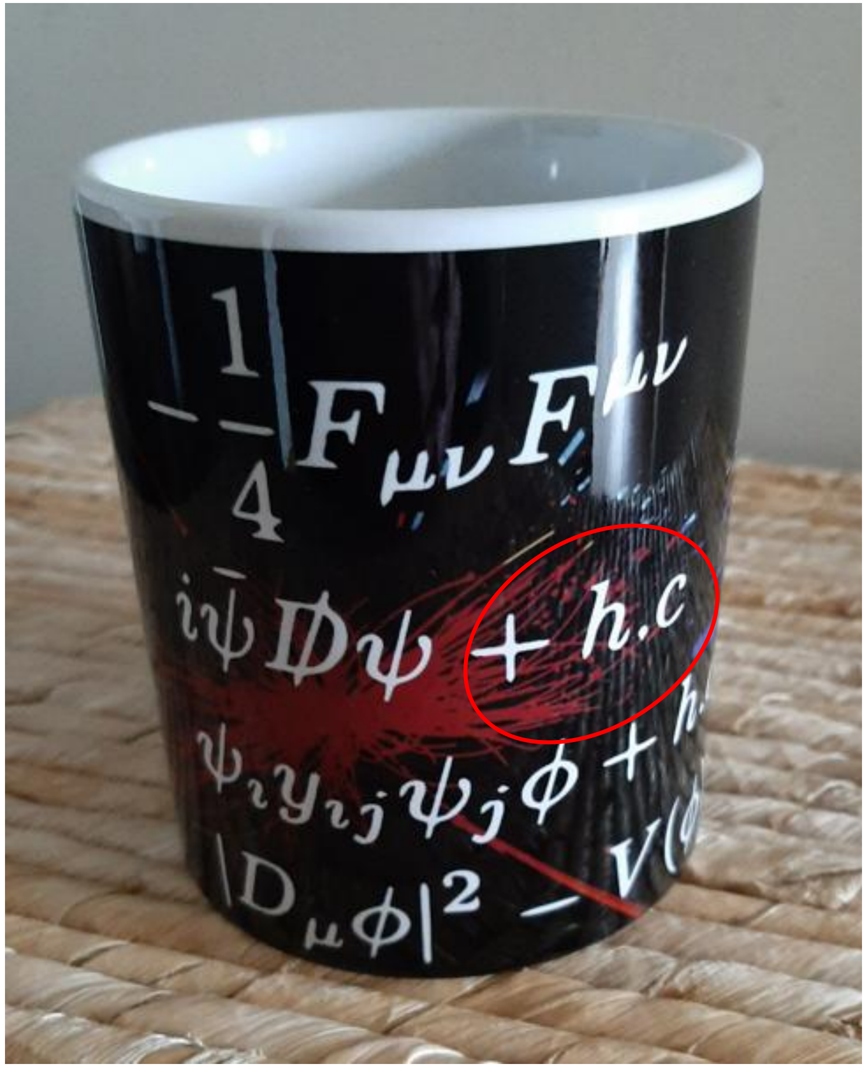
Hiermee kan je het magnetisch moment van een elektron uitrekenen met spinfactor $g_s = 2(a+1)$, met:

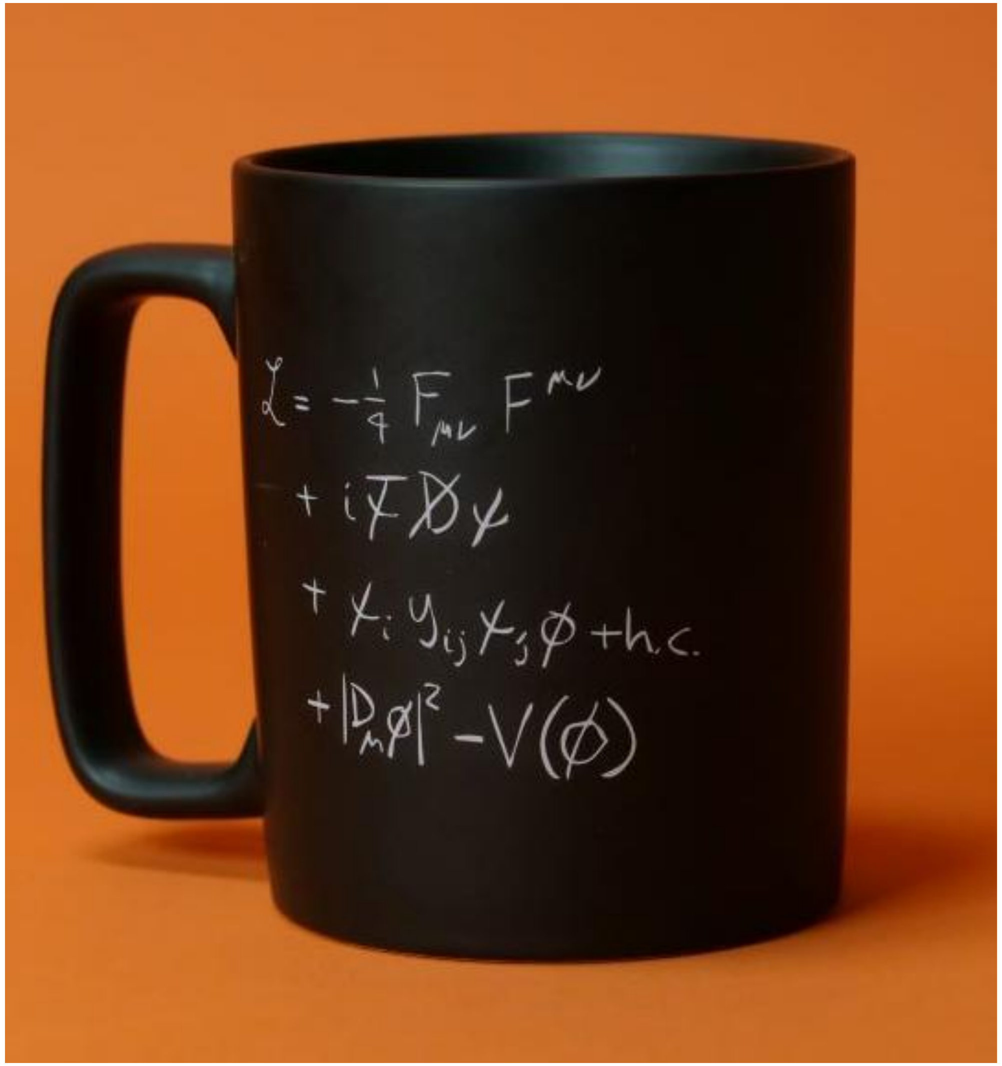
QED: $a = 0{,}001\,159\,652\,181\,643(764)$

experimenteel: $a = 0{,}001\,159\,652\,180\,59(13)$

(met dank aan hogere orde berekeningen en renormalisatie!)

Lagrangiaan van het Standaardmodel



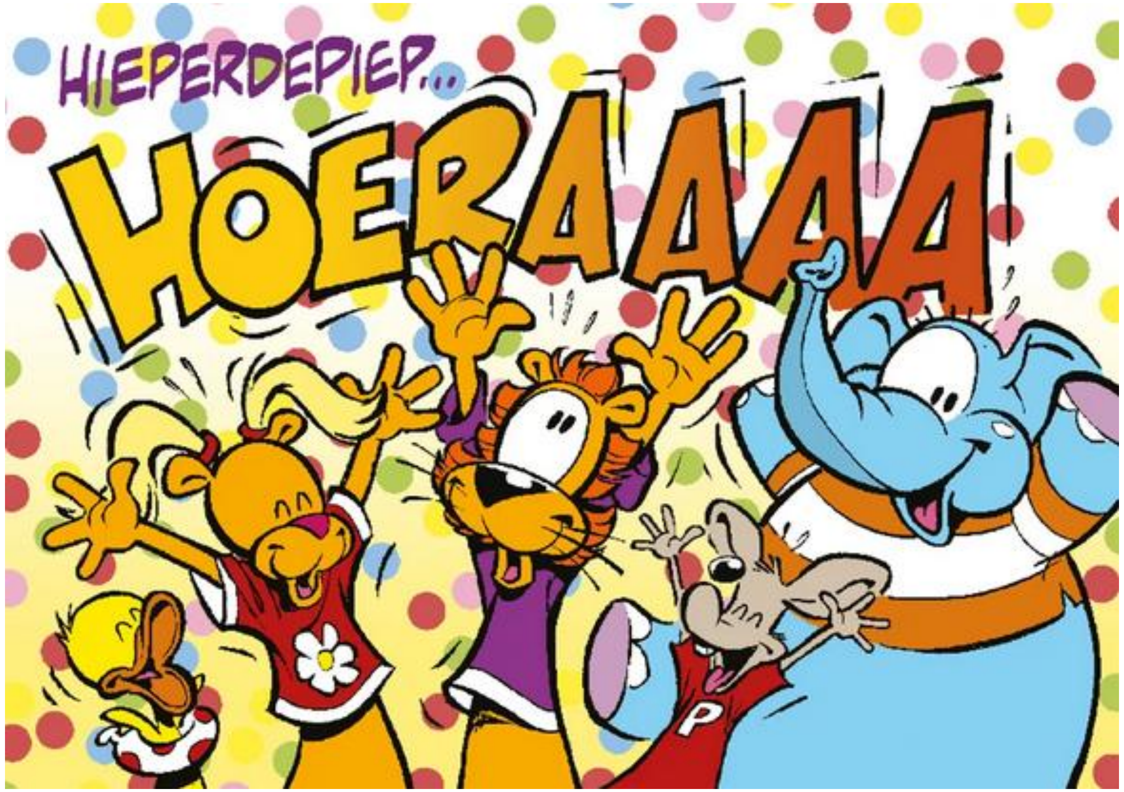


NB: = onjuist! Of “h.c.” = hot coffee?

- Donkere materie?
- Donkere energie?
- En wat als het universum niet homogeen en isotroop is?

"Quantumveldentheorie neemt een centrale positie in in onze beschrijving van de natuur. Het biedt zowel onze beste werkbeschrijving van fundamentele natuurkundewetten alsook een vruchtbaar gereedschap bij het onderzoeken van het gedrag van complexe systemen"

(Frank Wilczek in 1998)



"Quantum field theory occupies a central position in our description of Nature. It provides both our best working description of fundamental physical laws, and a fruitful tool for investigating the behavior of complex systems."

(Frank Wilczek in 1998)

Literatuur

- David Tong – Quantum Field Theory – University of Cambridge
- J.J. Sakurai & Jim Napolitano – Modern Quantum Mechanics
- A. Zee – Quantum Field Theory in a Nutshell
- Michael E. Peskin & Daniel V. Schroeder – An Introduction to Quantum Field Theory
- M. Srednicki – Quantum Field Theory

Dank voor jullie aandacht!