

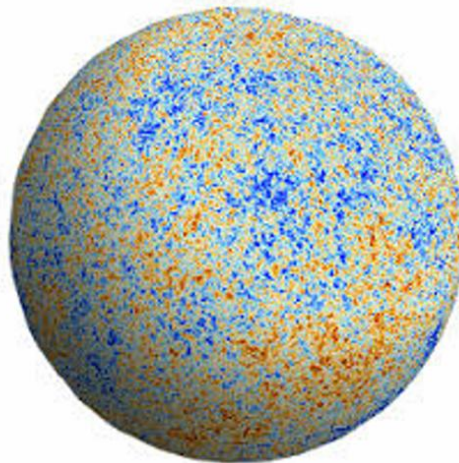
Het begin en einde van alle structuren in het heelal

Van iets naar Niets

“Alles is ontstaan uit het onbepaalde en keert daarin ook terug”
Anaximander (6^{de} eeuw v. Chr)

Syllabus bij de Daedalus Workshop gegeven door Nico Roos, 8 sept. 2026
Deze syllabus is geschreven door N. Roos en inhoudelijk gecontroleerd door AI (Claude Sonnet 5).

In de Workshop reizen we van de CMB (Cosmic Microwave Background) naar de vorming van sterren, sterrenstelsels en clusters van sterrenstelsels. We behandelen het viriaal evenwicht, koeling, de vorming van de eerste sterren(stelsels) en de instorting van sterren tot witte dwergen, neutronensterren en zwarte gaten, en waarom de zwaartekracht uiteindelijk alles overwint en het heelal leegloopt.



David. Tong

Zier ook eerdere cursussen en workshops:

“Inleiding Kosmologie-okt-2023”
“Entropie in de Kosmos”
“Straling in het Heelal en de groei van Massieve Zwarte Gaten”
“Galaxy Mergers en de Archeologie van de Melkweg”
“Gravitatiegolven van Massieve Zwarte Gaten”

Literatuur:

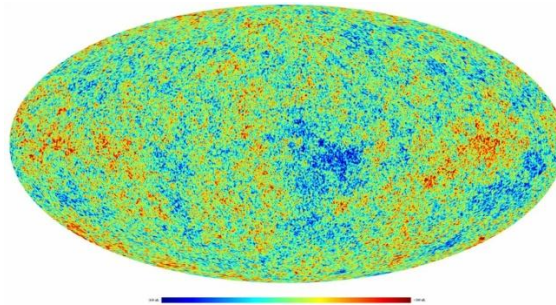
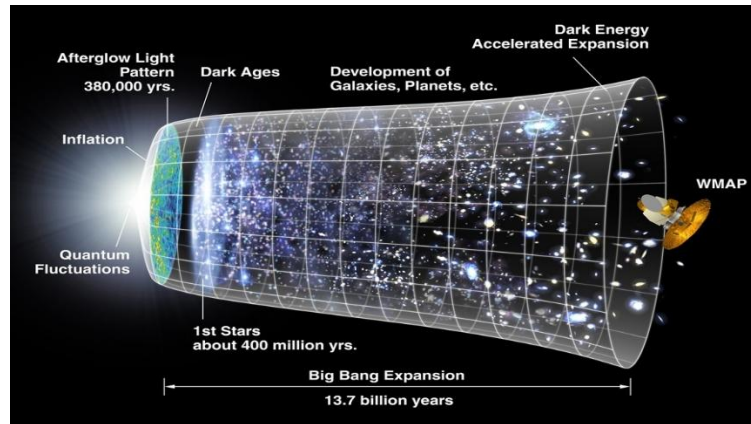
[cosmo](#) (David Tong “Cosmology”)
“Galaxy Formation” by Malcolm S. Longair

1. Inhoudsopgave

2.	De dichtheidsfluctuaties in het vroege heelal.....	4
2.1	Groei van fluctuaties in een vlak heelal.	5
2.2	De instortingstijd van gebonden systemen.....	7
2.3	De zwaartekracht en het viriaal evenwicht.....	8
2.3.1	De collapse van een bol met massieve deeltjes.....	9
2.3.2	Begintoestand van de zon.....	10
2.3.3	De Kelvin-Helmholtz tijdschaal.....	10
2.3.4	Jeans criterium.....	11
2.4	Twee overgangen in het vroege heelal:	12
2.4.1	Overgang Straling → materie dominantie bij $z \sim 3400$	13
2.4.2	Na recombinitie (z_{rec}): de druk van de fotonen op de baryonen valt weg	14
2.4.3	Koeling van het gas en straling door de expansie van het heelal.	15
3.	Het spectrum van temperatuurfluctuaties gemeten door de Planck satelliet.....	16
3.1	Fluctuaties in DM direct na recombinitie:	17
3.1.1	De vorming van de eerste sterren en sterrenstelsels.....	18
3.1.2	De huidige dichtheidscontrasten in het heelal. Dissipatie van energie!	20
4.	Koeling van gas in gebonden systemen.	21
4.1	Het koelingsprobleem (het oergas).....	21
4.2	De vorming van galaxies ($z \sim 1 - 10$).....	23
4.3	De eerste (sterren)stelseltjes.....	24
4.3.1	H ₂ koeling en de vorming van de eerste sterren	24
4.3.2	Stervorming toen en nu	25
4.4	De vorming van jonge sterrenstelsels.....	26
4.5	De vorming van de Melkweg	26
4.5.1	Koeling in onze Melkweg op dit moment.....	28
4.5.2	De hiërarchische opbouw van sterrenstelsels.....	28
4.6	Grote clusters ($z \sim 0 - 1$).....	28
4.7	Karakteristieke massa van sterrenstelsels	29
5.	Wat kan de zwaartekracht tegenhouden.	29
5.1	De toestandsvergelijking voor witte dwerg en neutronenster.....	30
5.2	Van onze zon tot een witte dwerg.....	31
5.3	Van Witte Dwerg naar Neutronenster en Black Hole.....	34
5.4	De energie van een supernova.....	35
6.	Het einde van alle structuur in het heelal	36

6.1	De grootste gebonden structuren	36
6.2	Van Iets naar Niets.....	37
7.	Appendices	39
7.1	Appendix 1 Conditie bij $z \sim 3400$	39
7.2	Appendix 2 Afleidingen Viriaal theorema.....	41
7.2.1	Twee deeltjes systeem bijv. in een Keplerbaan	41
7.2.2	Veel deeltjes systeem.....	41
7.2.3	2de hoofdwet van de thermodynamica.....	41
7.2.4	Viriaal theorema en het Jeans criterium	42
7.2.5	Viriaal theorema en hydrostatische evenwicht	42
7.2.6	Het Viriaal theorema en de straal van de zon.	43
7.3	Appendix 3. Koeling in galaxies vroeger en nu	45
7.4	Appendix 4: Relativistische energievergelijking (energie en druk)	46
7.5	Appendix 5. Relatie Druk – (Energie)dichtheid voor ideaal gas	47
7.6	Appendix 5. Veel gebruikte grootheden en constanten.	48

2. De dichtheidsfluctuaties in het vroege heelal



$$\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5}$$

Hieruit zijn structuren ontstaan zoals sterrenstelsels met dichtheidscontrast

$$\frac{\rho_{galaxy}}{\rho_{crit}} \approx 10^3 \text{ (DM halo) tot } 10^4 \text{ (schijf)}$$

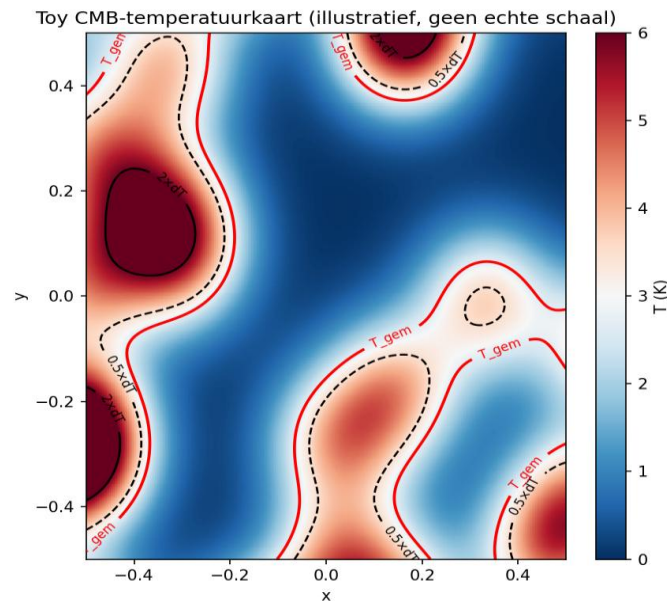
en sterren met dichtheidscontrast 10^{29} of meer. Hoe kunnen de structuren die we nu zien het resultaat zijn van deze kleine fluctuaties in de dichtheidsverdeling?

$$\Delta = \delta\rho/\rho = (\rho_{fl} - \rho)/\rho \approx 3 \frac{\delta T}{T} \approx 3 \cdot 10^{-5}$$

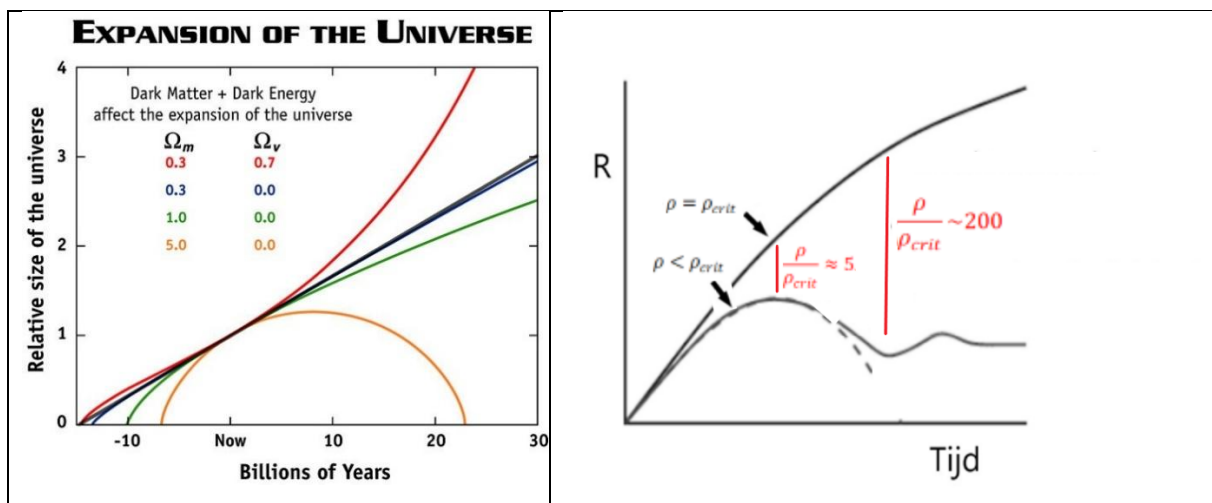
Standaard kosmologische model.

We gaan uit van het standaard Friedmann-Robertson-Walker model voor het heelal met de volgende eigenschappen: baryonen (H + He): 5% Donkere materie: 27%, Donkere Energie: 68%, fotonen, $\Omega \approx 1$ ($\rho \approx \rho_{crit}$), $T \approx 3700 \text{ K}$ at $z = 1000$. Inflatie $\rightarrow$ scale-free fluctuatiespectrum (power-law spectrum of adiabatic scalar perturbations, index n).

2.1 Groei van fluctuaties in een vlak heelal.



Temperatuurfluctuaties kunnen worden geïnterpreteerd als dichtheidsfluctuaties. We kunnen in de temperatuurkaart gebieden onderscheiden waarin de gemiddelde temperatuur groter of kleiner is dan de gemiddelde temperatuur. In een vlak heelal komen die gebieden (ongeveer) overeen met gebieden waarin de gemiddelde dichtheid groter of kleiner is dan de kritische dichtheid. De gebieden met $\bar{\rho} > \rho_{crit}$ (hierboven rood gekleurd) zullen uiteindelijk gravitationeel gebonden raken en samentrekken waardoor de dichtheid toeneemt. In die gebieden ontstaan sterrenstelsels. De gebieden met $\bar{\rho} < \rho_{crit}$ (hierboven aangegeven in blauw) zullen uitdijen. Die gebieden (voids) kunnen natuurlijk ook gebieden bevatten waarin de dichtheid lokaal groter is dan ρ_{crit} . De dynamica van de fluctuaties met $\bar{\rho} > \rho_{crit}$ verloopt op dezelfde manier die van een heelal met $\Omega > 1$ (zie hieronder).



We kunnen dan op eenvoudige manier een schatting maken van de groei van fluctuaties in een vlak heelal. Voor een vlak heelal geldt: dat de dichtheid gelijk is aan

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3}{8\pi G} H^2 \quad \text{ofwel} \quad \frac{1}{2} \frac{da^2}{dt} = \frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{crit}} a^2 \quad 1$$

(kinetische + potentiële energie = 0). Hier is a de schaalfactor van het heelal en $H = \dot{a}/a$ de Hubble constante is. We kunnen een gebied met een dichtheid die iets groter is dan ρ_{crit} beschouwen als een mini-heelal met een dichtheid ρ_{fl} iets groter dan ρ_{crit} . Dat mini-heelal is niet vlak, maar gesloten. Voor de dichtheid geldt dan

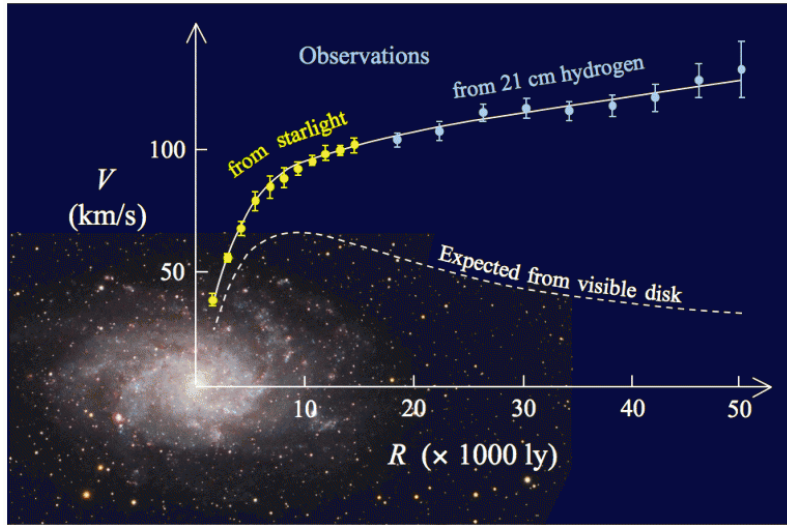
$$\rho_{\text{fl}} = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{kc^2}{2a^2} \right) \quad \text{ofwel} \quad \frac{1}{2} \frac{da^2}{dt} = \frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{fl}} a^2 - \text{constante} \quad 2$$

(Kinetische + potentiële energie = $\text{constante} = -kc^2$). Als we deze 2 vergelijkingen van elkaar aftrekken vinden we voor

$$\Delta = \frac{\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{crit}}}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{\rho_{\text{crit}} a^2} \propto a \propto (1+z)^{-1} \quad 3$$

Nu hebben we een probleem! De dichtheidsfluctuaties in de CMB op $z \sim 1000$ zijn van de orde 10^{-5} . Die zouden op $z = 0$ gegroeid zijn met een factor 1000. Daarmee zouden de fluctuaties nu slechts ongeveer 10^{-2} zijn. Hoe kan dat, gezien het feit dat de structuren die we zien allang door de instortingsfase heen gegaan zijn en nu in evenwicht zijn en een dichtheidscontrast $\gg 1$ hebben?

De rol van Donkere materie bij de vorming van structuren in ons heelal.



Voor de dichtheidsfluctuaties in de materie geldt: $\delta\rho/\rho = 3 \frac{\delta T}{T}$. De pieken in de temperatuur fluctuaties zijn ongeveer $\left. \frac{\delta T}{T} \right|_{peak} \sim 6 \cdot 10^{-5}$ met dichtheidsfluctuaties $\delta\rho/\rho = 3 \left. \frac{\delta T}{T} \right|_{peak} = 18 \frac{\delta T}{T}$. Dark matter fluctuaties gaan groeien (logaritmisch) vóór z_{eq} met een factor ~ 2 voor grote massa's ($10^{14} M_{\odot}$) tot ~ 3 voor kleine massa's ($10^6 M_{\odot}$). Vanaf $z = z_{eq} \sim 3500$ tot $z = z \sim 1000$ groeien ze $\propto (1+z)^{-1}$ tot met factor 3.5. Bij recombinitie zijn die fluctuaties dus

$$\left. \frac{\delta\rho}{\rho} \right|_{DM} \sim (2-3) 3.5 \left. \frac{\delta\rho}{\rho} \right|_{bar} \sim (2-3) (3.5 \times 18) \frac{\delta T}{T} \sim 10^{-3} \text{ op } z = 1000.$$

Genoeg om de fluctuaties te laten groeien naar $\delta\rho/\rho \sim 1$ op $z \sim 10$ ($t \sim 0.1$) voor dwergstelsels, en op $z \sim 1$ ($t \sim t_{un}/2$) voor onze Melkweg. Vervolgens bereiken de fluctuaties in de DM hun maximale straal. Ze hebben dan een dichtheidscontrast $\rho_{turn}/\bar{\rho}_{turn} \sim 5$. Vervolgens storten ze in onder hun eigen zwaartekracht waarbij ze (zonder energieverlies) een evenwichtstoestand bereiken waarin het dichtheidscontrast (op dat moment: z_{coll}) ongeveer $5^2 \times 8 = 200$ is. Het huidige dichtheidscontrast is dan $\sim 200(1+z_{coll})^3$.

2.2 De instortingstijd van gebonden systemen.

We kunnen het dichtheidscontrast van onze Melkweg ook schatten door de tijd te schatten die het stelsel er over gedaan heeft om onder zijn eigen zwaartekracht te vormen. Vanaf $\delta\rho/\rho \sim 1$ zullen gebonden systemen snel in elkaar storten tot ze in een evenwichtssituatie zijn. We noemen die evenwichtssituatie het viriaal evenwicht, of het hydrostatisch evenwicht (zie de volgende paragraaf). De tijd die nodig is om in dat evenwicht te bereiken kan geschat worden met de volgende formule voor de “vrije val tijd” of “collaps tijd”

$$t_{ff} \sim \frac{R}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim 10^9 \text{ yr} \left(\frac{\rho}{2 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad 4$$

Je kunt deze formule afleiden uit Kepler's wet, of uit de bekende formule $v^2 = GM/R$ waarin v de typische snelheid is van de deeltjes en M en R de massa en straal van het systeem. Meestal wordt voor de typische snelheid v de snelheidsdispersie σ gebruikt ($\sigma^2 = \langle v^2 \rangle$), ofwel de standaardafwijking van de gemiddelde snelheid.

De instortingstijd van onze Melkweg ($M = 10^{12} M_\odot$, $R = 100 \text{ Kpc}$, $v \sim 200 \text{ km s}^{-1}$) is dus ongeveer 10^9 yr volgens bovenstaande formule. Wanneer bij de instorting geen energieverlies plaatsvindt zal de gemiddelde dichtheid van het stelsel na instorting (dus op $z \sim 2$) gegeven worden door (huidige dichtheid van het heelal is $\rho_{crit} \sim 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$)

$$\rho_{MW,DM} \sim 200 \rho_{un}(z = 2) \sim 200 \cdot 0.3 \rho_{crit} (1 + z)^3 \sim 10^{-23} \text{ kg m}^{-3}$$

Deze dichtheid komt redelijk in de buurt van de gemiddelde dichtheid in de halo van onze Melkweg. Uiteindelijk heeft koeling van het baryonische gas dat in de potentiaalput van de DM is gevallen voor de sterverdeling (lichtverdeling) gezorgd die we nu waarnemen.

2.3 De zwaartekracht en het viriaal evenwicht

De dichtheidsfluctuaties in de DM groeien onder invloed van de zwaartekracht groeien tot ze zich losmaken van de uitdijning en door de eigen zwaartekracht instorten. Daarbij wordt potentiële energie omgezet in (random) kinetische energie. Ze komen dan in een (thermodynamisch) stabiele toestand terecht die beschreven wordt door het viriaal theorema. dat zegt dat de potentiële gravitatie energie E_{pot} in evenwicht is met de kinetische energie E_{kin} (voor afleidingen van deze formule: zie [Appendix 7.2](#))

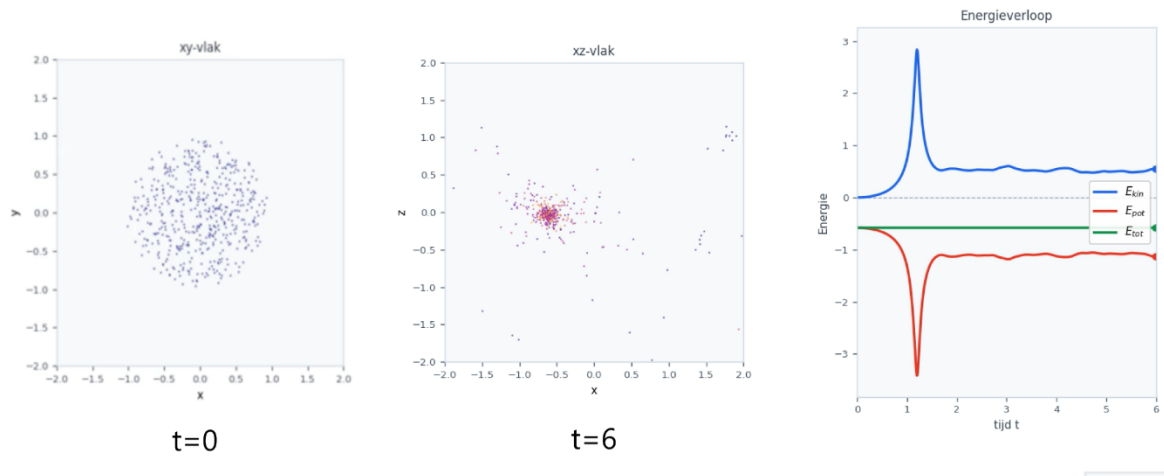
$$2E_{kin} = -E_{pot} \quad 5$$

Of met $E_{kin} = \frac{1}{2} M v^2$, waar v^2 eigenlijk gelijkgesteld moet worden aan de gemiddelde waarde van v^2 die de “snelheidsdispersie” genoemd σ wordt: $\sigma^2 = \langle v^2 \rangle$

$$v^2 \sim \frac{GM}{R}$$

2.3.1 De collapse van een bol met massieve deeltjes (m.b.v Claude)

Begin condities: $E_{kin} = 0, R = R_{max}$



Gemaakt met hulp van Claude AI

De totale energie wordt gegeven door de potentiële energie op het moment dat de bol met deeltjes de maximaal is uitgedijd en $E_{kin}(t = 0) = 0$

$$E_{totaal} = E_{kin} + E_{pot} = -\frac{GM^2}{R_{max}}$$

Met het viriaal theorema vinden we dan voor het systeem in evenwicht op $t = t_{ev}$

$$E_{totaal} = -E_{kin} = \frac{1}{2}E_{pot} = -\frac{GM^2}{R} \Rightarrow v^2 \approx \frac{GM}{R}$$

Hiermee kunnen we ook berekenen dat het systeem uiteindelijk een straal heeft van $\sim \frac{1}{2}R_{max}$. In de numerieke simulatie hieronder wordt dat gedemonstreerd.

Een eenvoudige berekening (Newtonse benadering van de uitdijning; zie [cosmo](#) hfdst 3.3.2 van Tong). laat zien dat het dichtheidscontrast op het moment van maximale expansie ongeveer $9\pi^2/16$. Op het moment dat de evenwichtstoestand is bereikt – de leeftijd van het heelal is dan 2x zo groot- is $a(t) \propto t^{2/3}$ een factor $2^{2/3}$ groter geworden waardoor de dichtheid in het heelal met een factor 4 is gedaald, en de dichtheid in het virialiserende systeem met een factor $(R_{maz}/R_{vir})^2 = 2^3$ toegenomen. Daarmee wordt het dichtheidscontrast ongeveer $32 \times 9\pi^2/16 = 18\pi^2 \sim 200$ op het moment dat de evenwichtstoestand wordt bereikt. Dat impliceert dat de huidige dichtheid een factor $200(1+z)^3 \sim 10^5 - 10^3$ groter is dan de dichtheid in het heelal. De halo van onze Melkweg ($R \sim 100 \text{ kpc}$) heeft een gemiddelde dichtheid die ongeveer een factor 10^3 groter is dan de kritische dichtheid terwijl de schijf een gemiddelde dichtheid heeft die ongeveer een factor 10^5 groter is. De gaswolken in de schijf en de sterren hebben natuurlijk een veel groter dichtheidscontrast. Dat kan alleen het gevolg

zijn van energieverliezen. Donkere materie heeft geen energieverliezen ondergaan, maar de baryonische materie des te meer.

Wanneer een graviterend systeem (stralings)energie verliest terwijl de massa bij benadering gelijk blijft krimpt het. Het systeem gaat naar een nieuw viriaal evenwicht waarin de totale energie E_{totaal} lager en de straal R kleiner is. Daardoor neemt de temperatuur ($\propto v^2$) toe. Je kunt de totale energie die een systeem in evenwicht heeft verloren schatten met de formule

$$\Delta E_{totaal} = \frac{GM^2}{R} - \frac{GM^2}{R_{max}} \sim \frac{GM^2}{R} \quad \text{wanneer } R \ll R_{max} \quad 6$$

Laten we de zon als voorbeeld nemen om te zien hoeveel energie de zon heeft verloren sinds zijn geboorte. De zon heeft een straal van $R_{\odot} \sim 7 \cdot 10^8 m$

$$\Delta E_{totaal} \sim \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \sim 4 \cdot 10^{41} J$$

2.3.2 Begintoestand van de zon

De zon is ontstaan uit een koele gaswolk in de Melkweg met een volume .

$$V_{wolk} = \frac{M_{\odot}}{\rho_{MW}} = \frac{2 \times 10^{30} kg}{1.3 \times 10^{-21} kg m^{-3}} \approx 1.5 \times 10^{51} m^3$$

Dit geeft een straal van $R_{wolk} \approx 7 \times 10^{16} m \approx 2.4 \text{ parsec}$ — een typische moleculaire wolk. Zonder energieverliezen (zoals de DM) zou de zon na virialisatie een straal hebben van $R_{wolk}/R_{\odot} \approx 2$. In werkelijkheid is het $R_{wolk}/R_{\odot} \approx 10^8$. Het dichtheidscontrast met de oorspronkelijke wolk is dus een factor $(10^8/2)^3 = 10^{21}$. De zon heeft dus tijdens zijn bestaan een enorme hoeveelheid energie uitgezonden. Energieverlies leidt er toe dat een systeem dat door de zwaartekracht gebonden is steeds compacter wordt. De straal van het systeem is een directe maat voor de hoeveelheid energie die het systeem heeft uitgezonden.

De hoeveelheid energie die de zon heeft verloren is niet alleen verlies van de kinetische (thermische) energie geweest die de zon direct na zijn vorming had. Dat werd al duidelijk door de schatting van Kelvin en ad. Itz. De zon produceert zelf energie in de vorm van kernfusie.

2.3.3 De Kelvin-Helmholtz tijdschaal

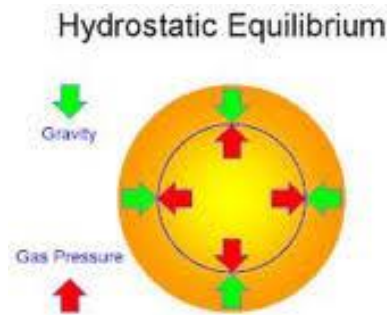
Hieruit volgt direct de **KH-tijdschaal**: hoe lang zou de zon alleen op gravitationele energie kunnen schijnen?

$$t_{KH} = \frac{\Delta E}{L_{\odot}} = \frac{4 \times 10^{41}}{3.8 \times 10^{26}} \approx 10^{15} s \approx 30 \text{ miljoen jaar}$$

ΔE is de gravitatie energie van de zon ($GM_{\odot}^2/R_{\odot}$) en $L_{\odot}$ is de hoeveelheid energie die de zon per seconde uitzendt. Dit was het grote 19e-eeuwse raadsel: Kelvin en Helmholtz berekenden dat de zon slechts ~30 miljoen jaar oud kon zijn op basis van gravitatie alleen — veel te kort voor de geologische tijdschaal. De oplossing moest wachten op de ontdekking van kernfusie, dat ~ 1000 × meer energie levert en een tijdschaal van 10 miljard jaar geeft

2.3.4 Jeans criterium

Het Jeans criterium wordt in de kosmologie gebruikt om te bepalen of een gaswolk onder invloed van zijn eigen zwaartekracht zal instorten en een nieuwe ster of sterrenstelsel zal vormen.



Dit criterium komt overeen met Viriaal theorema en het hydrostatisch evenwicht $P_{gas} = P_{grav}$ dat In [Appendix 7.2.5](#) wordt afgeleid wordt

$$P_{gas}V = \frac{3}{5}\rho c_s^2 V = \frac{1}{3}\rho \langle v^2 \rangle V = \frac{2}{3}E_{kin} \quad 7$$

$$P_{grav} V \sim -\frac{1}{3}\frac{GM^2}{R} = -\frac{1}{3}E_{grav}$$

De geluidssnelheid in het kwadraat is evenredig met de snelheidsdispersie van de atomen ($c_s^2 = \frac{5}{9}\langle v^2 \rangle$ voor een mono-atomisch gas). Hiermee vinden we dan de Jeans massa M_J en Jeans straal R_J (zie hieronder). Het Jeans criterium wordt vaak op een andere manier geformuleerd, nl. dat de tijd die een geluidsgolf nodig heeft om de straal van de bol te overbruggen $t_{sound} = R/c_s$ gelijk is aan de tijd die de atomen nodig hebben om de de straal van de bol af te leggen $t_{free fall} = R/v$ (zie vergelijking 4)

$$t_{sound} \sim t_{free fall} \quad 8$$

Hiermee vinden we de Jeans straal R_J van de wolk en de Jeans massa M_J

$$t_{ff} = \frac{R}{v} = \frac{R_J}{c_s} = \frac{1}{G^{1/2}\rho^{1/2}} \Rightarrow M_J = \frac{4\pi}{3}\rho R_J^3 \sim \frac{1}{2}\frac{c_s^3}{G^{3/2}\rho^{1/2}} \quad 9$$

waarin $\gamma = 5/3$ voor een mono-atomisch gas. De kinetische energie (per massa m)

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}\frac{k_b T}{m} = \frac{3}{2\gamma}c_s^2 \Rightarrow c_s^2 = \frac{\gamma}{3}\langle v^2 \rangle = \frac{5}{9}\langle v^2 \rangle \quad 10$$

De laatste formule is in overeenstemming met het viriaal theorema. Uit de formules voor de Jeans massa en straal vinden we

$$c_s^2 = 2 \frac{GM_J}{R_J} = \frac{\gamma}{3} E_{kin} = \frac{5}{9} E_{kin} \quad 11$$

Met vergelijking 10:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{\gamma} c_s^2 = \frac{3}{\gamma} 2 \frac{GM_J}{R_J} = \frac{GM}{R} \Rightarrow 2E_{kin} = -E_{pot}$$

Voor een niet-relativistisch gas is c_s een goede benadering voor de snelheid van de massieve deeltjes. De temperatuur van een zelfgraviterende massa in viriaal evenwicht ligt wordt gegeven door

$$T_{vir} = \frac{GMm_H}{5k_B R} \sim 1000 K \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right) \left(\frac{R}{kpc} \right)^{-1} \quad 12$$

2.4 Twee overgangen in het vroege heelal:

Na Inflatie hebben we te maken met een homogeen heelal ondanks kleine (particle) horizon met kleine (vacuum) dichtheidsfluctuaties. Vlak voor recombinitie heeft het heelal een temperatuur $T = 2.7(1+z)$ met Donker materie, heel veel fotonen, overgebleven van de annihilatie van deeltjes met hun anti-deeltjes (elektronen - positronen), en relativistische deeltjes (voornamelijk protonen, elektronen). We noemen dit een relativistisch plasma. In deze deeltjesverdeling bevinden zich kleine fluctuaties $\delta\rho/\rho$ (afkomstig van de vacuüm fluctuaties in het vroege heelal) die in alle componenten gelijk aanwezig zijn. Die fluctuaties kunnen gaan groeien wanneer de druk in het heelal afneemt. DM ervaart geen druk van de andere componenten en kan als eerste gaan groeien. Bij recombinitie zijn ze al wat gegroeid. De baryonen voelen de rimpelingen in de gravitatiepotentiaal van de DM wel, maar reageren daar op met drukgolven. Bij z_{rec} valt de fotonendruk weg en kunnen de baryonen in de dichtheidsfluctuaties in de DM volgen en in de potentiaalputten van de DM stromen.

De particle horizon

De rol van de deeltjes horizon (soms apparent horizon genoemd) is belangrijk: het is de maximale comoving afstand die licht (of massieve deeltjes) kan hebben afgelegd sinds de Big Bang (BB) is:

$$d_{PH} \text{ of } d_H = c \int_{t=0}^t \frac{1}{a(t')} dt'. \quad (16)$$

$$d_H(z_{eq}) = 100 \text{ Mpc}$$

$$d_H(z_{recombinaie}) = 300 \text{ Mpc}$$

Inflatie kan o.a. verklaren waarom het heelal homogeen is op een schaal die veel groter is dan deze horizon. Gebieden die op een afstand liggen die groter is d_H kunnen geen informatie met elkaar hebben uitgewisseld sinds de BB. Toch hebben ze dezelfde temperatuur. Het idee is dat die homogeniteit al inflatie is ontstaan. Het heelal is daarna met grote snelheid uitgedijd waarbij gebieden die contact met elkaar hadden buiten elkaars horizon zijn gekomen. De particle horizon moet onderscheiden worden van de Event Horizon (EH) die ontstaat doordat het standaard model versneld uitdijt. Die horizon zorgt ervoor dat fotonen die van achter die horizon in onze richting worden gestuurd ons nooit zullen kunnen bereiken.

Er zijn twee momenten in de ontwikkeling van het heelal die we willen noemen.

Continuïteitsvergelijking: $\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + P/c^2) = 0 \rightarrow \rho \propto a(t)^{-3(1+w)}$, straling: $w = 0$, massieve deeltjes: $w = 1/3$

2.4.1 Overgang Straling → materie dominantie bij $z \sim 3400$

Overgang straling (relativistisch) dominantie → materiedominantie (niet-relativistisch)
 $z_{eq} \sim 3400$ (zie ook [Appendix 1 Conditities bij \$z \sim 3400\$](#))

$$z > z_{eq} \quad a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}, \quad \rho \propto a^{-4} \quad z < z_{eq} \quad a(t) \propto t^{2/3}, \quad \rho \propto a^{-3}, \quad c_s \sim c/\sqrt{3}$$

Fluctuaties in de DM groeien volgens

$$\begin{aligned} z < z_{eq} \quad \delta\rho/\rho &\propto \ln a(t) \\ z > z_{eq} \quad \delta\rho/\rho &\propto a(t) \end{aligned}$$

Bij z_{eq} zijn de dichtheidsfluctuaties in de DM gegroeid met factor 2.5

Vlak voor recombinitie is er sprake van thermisch evenwicht in het plasma van protonen, elektronen en fotonen. Die componenten hebben dus dezelfde temperatuur. De drukken die daarbij horen zijn

$$\begin{aligned} P_\gamma &= \frac{1}{3} aT^4 \sim 0.02 \text{ Pascal}, \\ P_p &= n_p kT \approx P_e = n_e kT \sim 1.3 \cdot 10^{-11} \text{ Pascal} \end{aligned}$$

De fotonendruk is dus vele malen hoger dan de baryonendruk. De snelheid van de elektronen en protonen wordt gegeven door $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$. Voor protonen is dat ongeveer 8.6 km s^{-1} . Dit zal ongeveer de geluidssnelheid zijn in het baryonengas na recombinitie. Tot dat moment is de geluidssnelheid in het plasma

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \right)}} \approx c/\sqrt{3}$$

Jeans length voor een relativistisch plasma

$$R_J \sim \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}} \ll \frac{c}{\sqrt{G\rho}} \approx \frac{c}{H} = d_H$$

$$M_J \sim M_H = \frac{4}{3} \pi \rho_m d_H^3 \approx 10^{16-17} M_\odot$$

Waarin we de afstand tot de horizon d_H weer tegenkomen.

Na recombinitie valt de fotonendruk op de baryonen weg en wordt de geluidssnelheid vergelijkbaar met de snelheid van de baryonen, dat is dat ongeveer 8.6 km s^{-1} . Jeansmassa wordt $\sim 10^6 M_\odot$. DM domineert dan de dynamica van de baryonen en de baryonen stromen in de potentiaalfuncties van de DM.

De baryonen reageren dan op de dichtheidsfluctuaties in de DM door middel van geluidsgolven met $c_s \approx c/\sqrt{3}$. **Vóór recombinitie** geldt: $c_s \sim c/\sqrt{3}$.

2.4.2 Na recombinitie ($z_{rec} \sim 1100$): de druk van de fotonen op de baryonen valt weg

($t_{rec} = 380.000$ jaar). $T_{rec} \sim 3000 \text{ K}$ ($\propto (1 + z_{rec})$).

$$c_s \sim 5.8 \text{ km s}^{-1} \text{ en } \rho(z_{rec}) \sim 3 \cdot 10^{-18} \text{ kg m}^{-3}$$

Na recombinitie valt de fotonendruk op de baryonen weg en wordt de geluidssnelheid vergelijkbaar met de snelheid van de baryonen, dat is dat ongeveer 8.6 km s^{-1} . Jeansmassa wordt $\sim 10^6 M_\odot$. DM domineert dan de dynamica van de baryonen en de baryonen stromen in de potentiaalfuncties van de DM.

Voor recombinitie overheerst de fotondruk de baryondruk volledig. Bij recombinitie daalt de verhouding met een factor

$$\frac{P_\gamma}{P_b} = \frac{aT^4/3}{n_b k_B T} \sim \frac{aT^3}{3n_b k_B} \sim 10^9 \quad 13$$

De waterstof atomen voelen geen druk meer van de fotonen. De Jeans massa daalt dan in zeer korte tijd naar

$$M_J \sim M_H = \frac{4}{3} \pi \rho_m (R_J/2)^3 \sim 10^6 M_\odot \quad 14$$

Deze massa komt overeen met de massa van de bolvormige sterrenhopen die we in onze (en andere sterrenstelsels) aantreffen. Men heeft wel verondersteld dat dit de verklaring was voor de vorming van bolhopen. We weten nu dat dat niet klopt, omdat bolhopen nauwelijks donkere materie bevatten. De Jeansmassa van $\sim 10^6 M_\odot$ past wel bij de eerste gaswolken die konden virialiseren bij $z \sim 10$. Het gas kon daarna waarschijnlijk voldoende koelen om uiteindelijk de eerste generatie sterren te vormen.

De fluctuaties in de dichtheden van de baryonen zijn nog steeds zeer klein

$$\delta\rho/\rho \sim 10 \frac{\delta T}{T} \approx 10^{-4} \quad 15$$

Fluctuaties in de materie groeien na recombinitie met $\delta\rho/\rho \propto a(t) \propto (1+z)^{-1}$. Ze zouden

tussen recombinitie en nu met een factor $z = 1000$ kunnen groeien en nu dus een grootte van $\approx 10^{-1}$ hebben. Dat is onvoldoende om de structuren te vormen die we nu zien. Kortom we hebben nog een ingrediënt nodig: de DM. De donkere materie begint al voor recombinitie te groeien. Theoretische berekeningen geven aan dat die groei voldoende is om bij recombinitie fluctuaties op te leveren ter grootte van $\delta\rho_{DM}/\rho_{DM} \sim 10^{-3}$. Deze zijn voldoende sterk om uit te groeien tot $\delta\rho_{DM}/\rho_{DM} > 1$. Na recombinitie kunnen de baryonen in de potentiaalputten stromen die door de DM zijn gevormd en sterren, sterrenstelsels en clusters van sterrenstelsels vormen (zie hoofdstuk III).

2.4.3 Koeling van het gas en straling door de expansie van het heelal.

Vlak voor recombinitie was de geluidssnelheid in het relativistische plasma ongeveer $c/\sqrt{3}$. De Jeans massa was toen ongeveer $10^{15} M_{\odot}$. Na recombinitie valt de stralingsdruk weg en wordt de druk bepaald door de temperatuur van het baryonische gas. De temperatuur van het gas is dan ongeveer $3000 K$ ($z = 1000$ maal de huidige temperatuur van de CMB). De geluidssnelheid voor een mono-atomisch gas ($\gamma = 5/3$) wordt gegeven door (zie [Appendix 7.5](#))

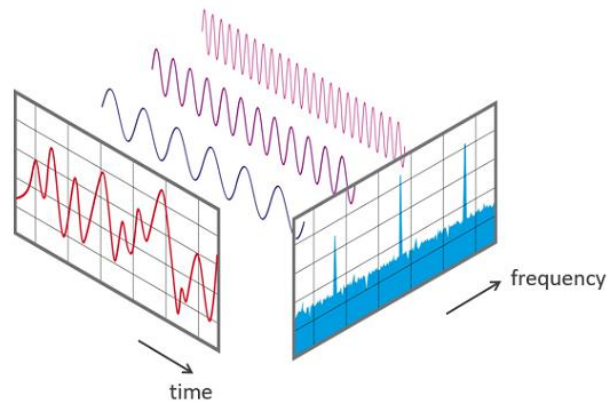
$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{m_H}} \sim 6 \text{ km s}^{-1} \left(\frac{T}{3000K} \right)^{1/2} \quad 16$$

De Jeans massa wordt dan plotseling meer dan 10 ordes van grootte lager en wordt $M_{Jeans} \sim 10^6 M_{\odot}$ zoals we hierboven al zagen.

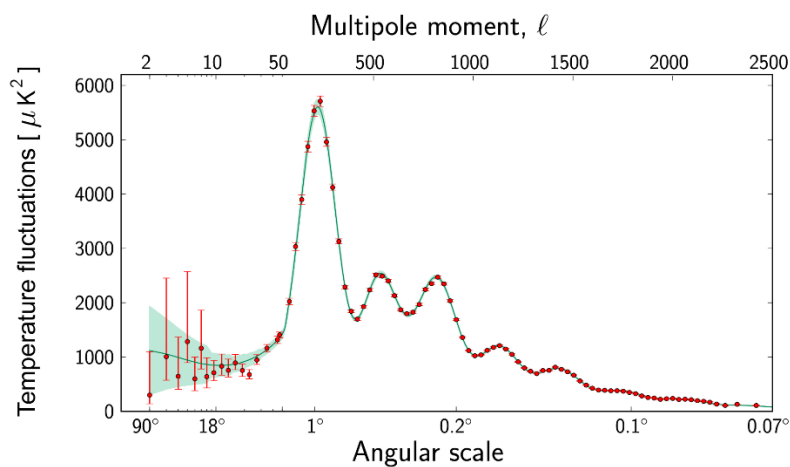
Na recombinitie neemt de temperatuur van de CMB verder af met $T_{\gamma} \propto a^{-1}$. De recombinitie is vanaf $z = 1000$ tot $z \sim 200$ nog niet volledig en de baryon temperatuur blijft nog gelijk aan die van de CMB via Compton scattering. Daarna neemt de temperatuur van de baryonen af met $T_{bar} \propto a^{-2}$, zodat de temperatuur bij $z \sim 20$ ongeveer $5 K$ is. De geluidssnelheid neemt af met $c_s^2 \propto a^{-2}$ en $R_{Jeans} \propto c_s/\sqrt{\rho} \propto a^{1/2}$, en $M_{Jeans} \propto a^{-3/2}$. De vraag is of de eerste sterren in zo'n koele oerwolk zouden kunnen zijn ontstaan. De temperatuur van de baryonen in het heelal is bij $z \sim 20$ nog maar $\sim 5K$. Onder die omstandigheden zou het gas in gebieden in dwergstelsels sterren kunnen gaan vormen. De waarnemingen (van o.a. quasar spectra) laten zien dat het koele gas in het heelal bij $z \sim 7$ werd opnieuw werd geïoniseerd waarschijnlijk door de straling van sterren en/of invallende materie bij zwarte gaten.

De Jeans massa daalt van $\sim 10^6 M_{\odot}$ bij recombinitie tot $10^4 M_{\odot}$ bij $z \sim 20$. Inmiddels zijn de dichtheidscontrasten in de DM voldoende gegroeid om de baryonen in te vangen. De baryonen stromen in de potentiaalputten van de DM. Het gas wordt daarbij weer opgewarmd tot een temperatuur dat de druk in evenwicht is met de zwaartekracht. De omstandigheden zijn dan waarschijnlijk gunstig voor de vorming van de eerste sterren. We komen daar straks op terug.

3. Het spectrum van temperatuurfuctuaties gemeten door de Planck satelliet.



1. Hierboven staat geschetst hoe je van een geluidsignaal (1D) dat bestaat uit een aantal frequenties een spectrum kunt maken. Je kunt hetzelfde doen met de temperatuurfuctuaties (2D) van de CMB. De tijd in de linker grafiek hierboven wordt dan vervangen door de positie aan de hemel. Door middel van Fourier analyse kun je dan tellen hoe vaak een bepaalde frequentie (of golfgetal) voorkomt. Het resultaat wordt weergegeven in het de rechter grafiek.



De temperatuurfuctuaties in de CMB zijn het gevolg van verdichtingen en verdunningen van de geluidsgolven in de baryonische materie (vergelijking 15).. Langs de x-as staat een maat voor de grootte van de golflengte van die golven. Opvallend is de grote piek bij $\theta_{peak} \sim 0.01 \text{ rad} \sim 1^\circ$ ($l \sim 220 = \pi/\theta$). De comoving hoekafstand afstand die daarmee overeenkomt wordt gegeven door

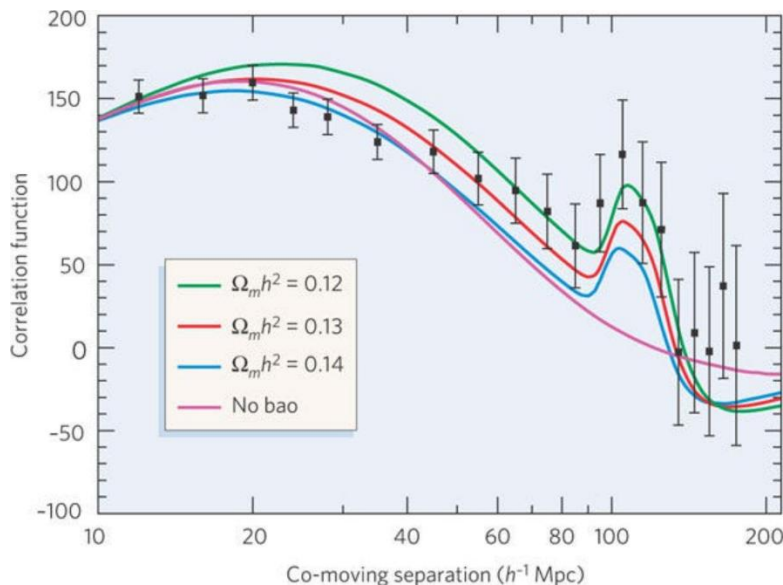
$$d_A = d_{hor,rec}/\theta_{peak}$$

waarin $d_{hor,rec}$ de geluidshorizon bij recombinitie is. De geluidssnelheid in het relativistische plasma van protonen, elektronen en fotonen is ongeveer $c/\sqrt{3}$. De comoving grootte van de geluidshorizon bij recombinitie is dus $d_{hor,rec}/\sqrt{3} \sim 150 \text{ Mpc}$. De kleinere

pieken kunnen geïnterpreteerd worden als boventonen. De grootte van de piek kan goed verklaard worden: hij wordt veroorzaakt door de grootste coherente fluctuaties die op $z = 1000$ kunnen bestaan; ze hebben de grootte (1°) van de schijnbare horizon op dat tijdstip. Baryonen vallen daar in en veroorzaken daardoor pieken in de temperatuurverdeling.

De analyse van bovenstaand plaatje heeft de bekende waarden voor het huidige standaardmodel van de kosmologie opgeleverd.

De grote piek in het CMB spectrum is ook in de huidige verdeling van sterrenstelsels terug te vinden met een comoving afstand van $\sim 150 \text{ Mpc}$!! (BAO's)



We zijn inmiddels 2 karakteristieke schalen tegengekomen in de CMB.

- 1) De massa binnen de geluidshorizon op een schaal van $\sim 100 \text{ Mpc}$. We zien die terug in de verdeling van sterrenstelsels in het heelal.
- 2) De Jeans massa op het moment van recombinitie: $M_J \sim 10^6 M_\odot$. Dit is de massa van de kleinste structuren in de DM die het waterstof gas in kunnen vangen en sterren vormen.

3.1 Fluctuaties in DM direct na recombinitie:

Power spectrum dichtheidsfluctuaties: $P(k) \propto k^n$, $n = 1 \rightarrow$ Hiërarchische clustering (kleintjes eerst), aangedreven door DM

De fluctuaties in de DM op $z = 1000$ hebben een grootte van $\sim 10^{-2}$ op de schaal van dwerg stelsels ($10^6 M_\odot$) tot 10^{-3} op de schaal van clusters ($10^{14} M_\odot$): De kleinere fluctuaties zullen dus als eerste collabereren en in viriaal evenwicht komen $\rightarrow$ **Hierarchische clustering**. Hieronder staan de standaard deviaties $\sigma(M, z)$ voor de DM fluctuaties bij recombinitie. De gemiddelde dichtheid voor een gebied met massa M wordt gegeven door

$$\langle \rho(M, z) \rangle = \rho_{crit}(1 \pm \sigma(M, z))$$

Het dichtheidscontrast van een gebied met massa M beschrijft de relatieve afwijking van de lokale dichtheid ten opzichte van de gemiddelde dichtheid

$$\delta(M) = \frac{\langle \rho(M) \rangle - \rho_{crit}}{\rho_{crit}} = \pm \sigma(M)$$

(Eigenlijk geldt $\langle \delta(M)^2 \rangle = \sigma(M)^2$). Volgens de Gaussische verdeling is de kans $2 \times 15.9\% = 32\%$ dat $|\delta(M)| > \sigma$. De berekeningen in het standaardmodel leveren dan de volgende schattingen op van de fluctuatie op $z = 1000$

Mass	$\sigma(M, z = 1000)$
$10^6 M_{\odot}$	$\sim 1.2 \times 10^{-2}$
$10^8 M_{\odot}$	$\sim 8.7 \times 10^{-3}$
$10^{10} M_{\odot}$	$\sim 5.7 \times 10^{-3}$
$10^{12} M_{\odot}$	$\sim 3.1 \times 10^{-3}$
$10^{14} M_{\odot}$	$\sim 1.3 \times 10^{-3}$

Deze zijn ruim boven de CMB temperatuur fluctuaties $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ en voldoende om de sterrenstelsels en clusters te vormen die we nu zien. De baryon fluctuaties bleven tot $z = 1000$ op het niveau van de foton amplitude $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ en reageerden op de fluctuaties in de DM met geluidsgolven. De massa $10^6 M_{\odot}$ komt overeen met de Jeans massa bij recombinitie en de grootste massa in het rijtje $10^{14} M_{\odot}$ past bij de massa van de rijke clusters. Zo zien we dat de fluctuaties in de DM voldoende sterk zijn om de structuren op te leveren die we nu zien.

Opmerking: In de wordt vaak σ_8 gebruikt als kosmologische simulaties wil vergelijken met de theorie. Dit getal is de standaardafwijking van de dichtheidsfluctuaties op een referentieschaal van $8 Mpc$ die de de grote clusters omvat. Het is niet de grootste schaal waarop gebonden structuren worden gevormd

3.1.1 De vorming van de eerste sterren en sterrenstelsels

Na recombinitie groeien de kleine dichtheidsfluctuaties in de DM verder uit tot $\delta\rho/\rho \sim 1$. Kort daarna zal de uitdijning in de fluctuaties snel stoppen en vervolgens onder hun eigen zwaartekracht instorten tot ze het viriaal evenwicht bereiken. De baryonische materie valt in de potentiaalputten van de DM.

De waarnemingen in combinatie met het standaardmodel van de kosmologie leiden tot de volgende scenario voor het ontstaan van sterren en sterrenstelsels

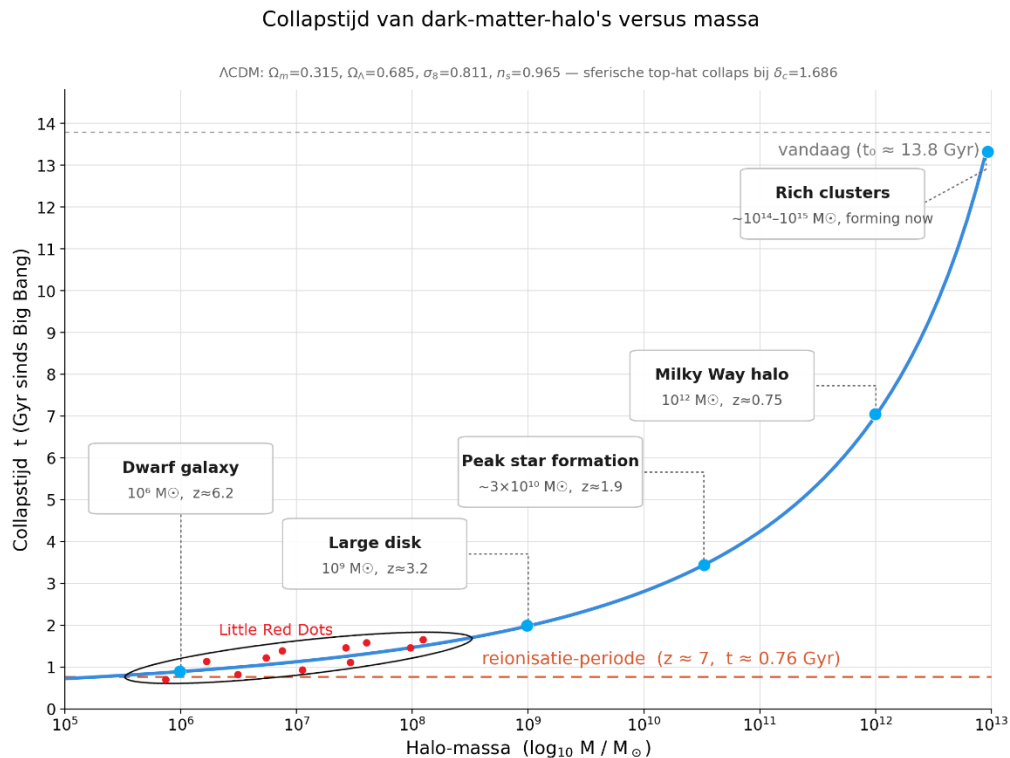
Tijdstip Roodverschuiving Gebeurtenis

~ 200 Myr	$z \sim 20$	Eerste Pop III sterren in kleine H_2 -gekoelde halo's
~ 400 Myr	$z \sim 10$	Reionisatie begint; eerste dwergstelsels
~ 1 Gyr	$z \sim 6$	Reionisatie voltooid; proto-Melkweg begint te assembleren

Tijdstip Roodverschuiving Gebeurtenis

~2–4 Gyr	$z \sim 2-3$	Piek stervormingsactiviteit; grote fusies
~10 Gyr	$z \sim 0.5$	Melkweg grotendeels geassembleerd; dunne schijf vormt zich
~13.8 Gyr	$z = 0$	Melkweg zoals we die kennen

Het standaardmodel voorspelt dan de volgende collapse tijden voor de DM halo's waarin stervorming zou kunnen plaatsvinden.



Top-hat spherical collapse on the CDM power spectrum (BBKS transfer function, Eisenstein & Hu normalization). The $\sigma(M)$ profile is computed from the Harrison–Zel'dovich primordial spectrum filtered with a top-hat window. Collapse is defined by $\delta_c = 1.68$ (Gemaakt met hulp van Claude AI)

- dwarf-galaxy halos ($\sim 10^6 M_\odot$) virialiseren bij $z \approx 6$, $t \approx 1$ Gyr
- Milky Way-sized halos ($\sim 10^{12} M_\odot$) virialiseren bij $z \approx 1-2$, around $t \approx 7$ Gyr
- Systemen $> 10^{13} M_\odot$ hebben $\delta_c = 1.686$ en zijn nog niet gevirialiseerd

Dit zijn de massa's van de DM structuren. De vraag is wat er met het baryonische gas gebeurt dat in die potentiaalputten valt. Dat bespreken we verder in dit document onder het hoofdstuk over koeling van het gas.

$$\rho_M = (1 \pm \sigma(M))\rho_{crit}$$

3.1.2 De huidige dichtheidscontrasten in het heelal. Dissipatie van energie!

We zien gebonden structuren in het heelal van sterren en sterrenstelsels tot clusters van sterrenstelsels. Die structuren verschillen sterk in hun dichtheid en temperatuur. Hieronder staan enkele voorbeelden

Object	Dichtheid (kg/m ³)	Massa (Mzon)	Temperatuur (K)
Huidig heelal (gemiddeld)	$\rho_{crit} \sim 10^{-26}$ $\rho_{bar} \sim 5 \cdot 10^{-28}$		2.7 (CMB)
Cluster van sterrenstelsels	$\sim 10^{-23}$	$\sim 10^{14}$	$10^7 - 10^8$
Melkweg halo (DM)	$\sim 10^{-23}$	$\sim 10^{12}$	$10^4 - 10^6$ (mix)
Schijf (DM)	$\sim 10^{-21}$	$\sim 10^{11}$	
Dwerg stelsel		$\sim 10^6$	$\sim 10^3$
Interstellair medium	$\sim 10^{-21}$		$10^3 - 10^4$
Warme HI wolk	$\sim 10^{-20}$		~ 8000
Moleculaire wolk	$\sim 10^{-17}$		$10 - 30$
Hoofdreksster (zon)	$\sim 1.4 \times 10^3$		$\sim 1.5 \times 10^7$ (kern)
Witte dwerg	$\sim 10^9$	< 1.44	$\sim 10^7$
Neutronenster	$\sim 10^{17}$	$< 1.5 \cdot 3$	$\sim 10^6 - 10^8$

De objecten in dit lijstje verschillen tot een factor 10^{40} in dichtheid. Het viriaal theorema zegt dat een DM object dat – na een fase van afnemende uitdijning - begint met een straal R en heel weinig (interne) kinetische energie zich zal samentrekken tot een evenwichtstoestand waarin de straal uiteindelijk $R/2$ bedraagt. Het geschatte dichtheidscontrast is dan ongeveer 200 (zie het hoofdstuk over het viriaal theorema). Als een object dat bestaat uit DM op een roodverschuiving z_{vir} virialiseert (de evenwichtstoestand bereikt) zal het dichtheidscontrast hooguit $\sim 200(1 + z_{vir})^3$ zijn. De oudste sterren in onze Melkweg hebben een geschatte leeftijd van $\sim 13 \cdot 10^9$ jaar. De rotatie kromme laat zien dat de DM een bredere verdeling heeft dan de (lichtgevende) baryonische materie. Sterrenstelsels zoals onze Melkweg is waarschijnlijk uit kleinere eenheden gevormd en heeft zijn uiteindelijke grootte gekregen op $z_{vir} \sim 2$. Dat betekent dat het huidige dichtheidscontrast van de Melkweg (ten opzichte van de rest van het heelal) een factor $200(1 + z_{vir})^3 \sim 10^3$ zou zijn. Dat klopt aardig met de waarde in de lijst hierboven. De zichtbare Melkweg heeft niet dezelfde grootte als de DM halo waar

hij in is ontstaan. De DM heeft alleen interactie met andere materie via de zwaartekracht. DM en verliest dan ook geen energie. De baryonische materie heeft wel energie verloren en heeft daardoor een kleinere straal en dus grotere dichtheid gekregen. We noemen die energieverliezen (meestal door uitgezonden straling) “dissipatie”.

Wanneer we naar het heelal kijken zien we alleen de lichtgevende materie in de vorm van sterren, sterrenstelsels en clusters van sterrenstelsels. Sterrenstelsels hebben wel wat, maar niet veel dissipatie ondergaan. Sterren zoals de zon zijn gevormd uit hetzelfde materiaal waar de Melkweg uit is gevormd. De gemiddelde dichtheid van de zon is 10^{24} maal zo groot als de dichtheid van de Melkweg. De dichtheid van een neutronenster is nog eens 10^{14} keer zo groot als die van de zon.

De enorme dichtheidscontrasten kunnen we alleen verklaren met dissipatie, energieverliezen van de baryonische materie door de uitzending van straling. Er doen zich dan direct allerlei vragen op waarvan we enkele zullen bespreken, zoals hoe komt het dat sterrenstelsels een karakteristieke massa en grootte hebben, en waarom zijn er geen sterrenstelsels die zo zwaar zijn als clusters van sterrenstelsels. Hoe zijn de eerste sterren ontstaan en hoe groot waren ze. Hoe ontstaan uiteindelijk neutronensterren en zwarte gaten. Om dat te begrijpen moeten we eerst meer weten over de **koeling van het gas** onder verschillende omstandigheden.

4. Koeling van gas in gebonden systemen.

4.1 Het koelingsprobleem (het oergas)

De fluctuaties in de DM vormen het skelet van de structuren in het heelal, maar ze zijn niet in staat om de dichtheidscontrasten te verklaren die we in het heelal zien. De baryonen van het oergas zullen de DM volgen en in de potentiaalputten van de DM stromen. Daarbij zullen ze de temperatuur en druk van het gas toenemen. De druktoename leidt tot de vorming van schokgolven in het gas waarbij de temperatuur oploopt. Als het gas niet in staat is om tijdens het virialisatie proces af te koelen zal het in een evenwichtstoestand komen waarin de temperatuur gelijk aan de virialisatie temperatuur van de DM en de dichtheidsverdeling die vergelijkbaar is met die van de DM.

Het gas dat in een potentiaalput van DM met een massa M_{DM} valt heeft een massa van $M_b \sim M_{DM}/6$, want $\rho_b \sim \rho_{DM}/6$ (zonder koeling). De viriaal temperatuur van het gas is dan $T_{vir,b} \sim 6 T_{vir,DM}$. Wanneer het gas onder zijn eigen zwaartekracht was ingestort tot een wolk van dezelfde afmeting en dichtheid had het een temperatuur gekregen

$$\sigma_{vir,b}^2 = \frac{GM_b}{R} = \frac{1}{6} \frac{GM_{DM}}{R} = \frac{1}{6} \sigma_{vir,DM}^2 \quad 17$$

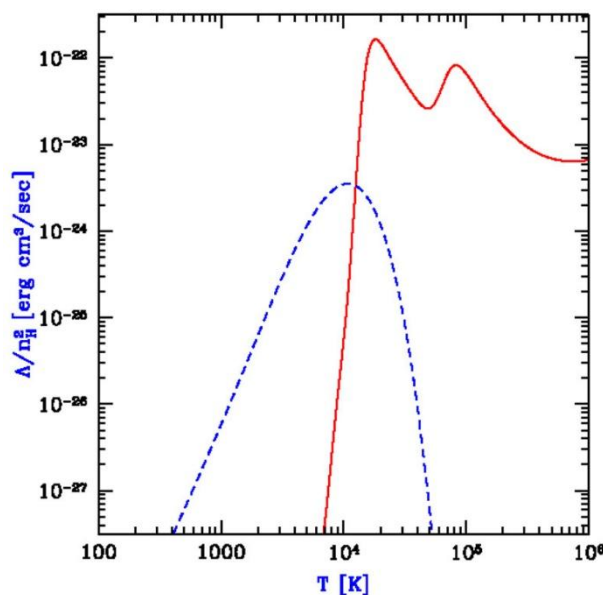
De Jeans massa is evenredig met σ^3 bij dezelfde dichtheid. De verhouding van de Jeans massa tot de werkelijke massa is dan

$$\frac{M_J}{M_b} = \frac{\sigma_{vir,DM}^3}{\sigma_{vir,b}^3} = 6^{3/2} \approx 15 \quad 18$$

De conclusie is dat het gas zonder koeling niet in staat is te fragmenteren en kleinere eenheden zoals sterren te vormen. Het is dan ook geen toeval dat de koelingstijd van het gas in de halo van onze Melkweg een koelingstijd heeft die vergelijkbaar is met de vrije val tijd.

De vraag is nu welke stralingsprocessen er een rol spelen en hoe die afhangen van de temperatuur (en dichtheid).

Na recombinitie bestaat de baryonische materie voornamelijk uit waterstof en helium. Het gas in ons melkwegstelsel bevat ook zwaardere elementen die zijn gevormd in verschillende levensfasen van sterren. Het gas waaruit onze zon is gevormd heeft een zgn “metallicity” van $Z \sim 0.014 - 0.02$ (de hoeveelheid elementen zwaarder dan waterstof en Helium). Die metallicity komt overeen met die van het ISM (Interstellair Medium). De hoeveelheid zwaardere elementen bepaald hoe snel het gas kan koelen wanneer het door de zwaartekracht bijeen gedrukt wordt. Atomen koelen af wanneer de elektronen bij botsingen met andere atomen in een aangeslagen toestand terechtkomen, waaruit ze vervolgens weer terugvallen onder uitzending van een foton. Die koelingstijd wordt veel korter wanneer het gas zwaardere elementen bevat. Zwaardere atomen hebben nu eenmaal meer elektronen die gemakkelijk aangeslagen kunnen worden. Hieronder staat een “Koelingcurve” geschetst voor het oergas dat voornamelijk uit waterstof en wat Helium bestaat. Die curve geeft aan hoeveel energie een gas met een bepaalde temperatuur (en dichtheid) uitzendt. De doorgetrokken lijn is voor HI (linker piek) en He2 (rechter piek) en de gestippelde lijn is voor moleculair waterstof gas



(from A. Loeb) Cooling rates as a function of temperature for a primordial gas composed of atomic hydrogen and helium, as well as molecular hydrogen, in the absence of any external radiation. We assume a hydrogen number density $n_H = 0.045 \text{ cm}^{-3}$, corresponding to mean density of virialized halos at $z = 10$. The plotted quantity Λ / n_H^2 is roughly independent of density (unless $n_H > 10 \text{ cm}^{-3}$), where Λ is the volume cooling rate (in erg/sec/cm^3). The solid line shows the cooling curve for an atomic gas, with the characteristic peaks due to collisional excitation of H1 and He2. The dashed line shows the additional contribution of molecular cooling, assuming a molecular abundance equal to 1% of n_H .

Het oergas raakt zijn energie veel moeilijker kwijt dan het gas in onze melkweg. Toch is onze melkweg uit oergas ontstaan. Later – na enkele generaties sterren – is het gas verrijkt met zwaardere elementen waardoor de koeling – en daardoor stervorming - gemakkelijker werd.

De Koelcurve (zwarte tekst is voor waterstofgas, blauw)

- Bij $T \sim 10^6 \text{K}$: bremsstrahlung (vrij-vrij straling) van volledig geïoniseerd plasma
- *Bij $T \sim 10^5 \text{K}$: grote piek door lijnstraling wanneer zwaar geïoniseerde metalen (Fe, O, Ne) aanwezig zijn: vorming van Pop I sterren*
- Bij $T \sim 10^4 \text{K}$: waterstof Lyman- α piek — dit is de **meest kritische drempel**
- Onder 10^4K : scherpe daling *tenzij moleculen aanwezig zijn*

4.2 De vorming van galaxies ($z \sim 1 - 10$)

De volgende formules kunnen van pas komen.

Voor een waterstofgas geldt dat de meest waarschijnlijke energie en snelheid van de atomen:

$$E = \frac{3}{2} k_B T \approx 86 \text{ eV} \left(\frac{T}{10^6 \text{K}} \right), \quad \sigma = (3k_B T/m)^{1/2} \approx 1.3 \cdot 10^2 \text{ km s}^{-1} \left(\frac{T}{10^6 \text{K}} \right)^{1/2} \quad 19$$

Viriaal temperatuur: ($\mu = 1.2$ voor primordiaal gas, 0.6 voor geïoniseerd gas en 2.3 voor moleculair $\text{H}_2 - \text{He}$ mengsel)

$$T_{\text{vir}} = \frac{GM\mu m_H}{2k_B R} \sim 1000 \text{ K} \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right) \left(\frac{R}{\text{kpc}} \right)^{-1} \quad 20$$

Dit is de temperatuur waaronder H_2 koeling effectief wordt. Als we er van uitgaan dat alle stelsels van klein tot groot nu zijn ontstaan dan zouden ze ongeveer gelijke dichtheid hebben. In dat geval zou de temperatuur $T_{\text{vir}} \propto M^{2/3}$. Rekening houdend met de

dichtheidsverandering door de uitdijning vinden we $T_{\text{vir}} \propto M/R \propto M^{2/3} \rho_{\text{coll}}^{1/3} \propto M^{2/3} (1 + z_{\text{coll}})$. Daarmee vinden we

$$T_{\text{vir}} \sim 3 \cdot 10^3 \text{ K} \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right)^{2/3} \left(\frac{1 + z_{\text{coll}}}{20} \right) \quad 21$$

(Barkana en Loeb, 2001). De dichtheid van een (DM) fluctuatie die virialiseert op $z_{\text{coll}} = 20$ is

$$\rho_{\text{coll},m}(z_{\text{coll}}) \sim 200 \Omega_m \rho_{\text{crit},z=0} (1 + z)^3 \sim 4 \cdot 10^{-21} \left(\frac{1 + z_{\text{coll}}}{20} \right)^3 \text{ kg m}^{-3} \quad 22$$

De Baryonen dichtheid is dan

$$\rho_{\text{coll},b}(z_{\text{coll}}) \sim 7 \cdot 10^{-22} \left(\frac{1 + z_{\text{coll}}}{20} \right)^3 \text{ kg m}^{-3} \sim 0.4 \text{ cm}^{-3} \quad 23$$

De Jeans massa voor de baryonen die in de potentiaalput van de donkere materie vallen is dan

$$M_{J,b} \sim 6 \cdot 10^6 M_\odot \quad 24$$

Dat is aanzienlijk meer dan hoeveelheid baryonen die zijn ingevangen door de DM massa. Het gas moet dus koelen om in dieper in de potentiaalput te kunnen zakken.

Hieronder zullen we 3 voorbeelden bespreken van DM structuren die na recombinitie ontstaan.

1. Koele Dwerg stelsels: $10^6 M_{\odot}$, $t_{collapse} \sim 0.7 \text{ Gyr}$, $T_{vir} < 10^4 \text{ K}$ Hierin ontstaan waarschijnlijk de eerste sterren uit het oergas dat voornamelijk uit waterstof en een beetje helium bestaat.
2. Zwaardere sterrenstelsels die wat later ontstaan $M = 10^8 - 10^{12} M_{\odot}$ waarin het gas goed in staat is om te koelen. We nemen ons Melkwegstelsel als voorbeeld. $M_{halo} = 10^{12} M_{\odot}$, $M_{bar} = 5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ $t_{collapse} \sim 7 \text{ Gyr}$.
3. Fluctuaties die nu nog bezig zijn om clusters en superclusters op grote schaal te vormen. De koelingstijd van clusters is groter dan de huidige leeftijd van het heelal. De maximale grootte van de sterrenstelsels in clusters is $\sim 10^{13} M_{\odot}$. Deze bevinden zich meestal in de centra van clusters en zijn waarschijnlijk gevormd door fusie van kleinere stelsels.

4.3 De eerste (sterren)stelseltjes

$$M_{DM} = 10^6 M_{\odot}, z_{coll} \sim 6.2 (t_{coll} \sim 0.7 \text{ Gyr})$$

We zagen dat de Jeans massa na recombinitie $\sim 10^6 M_{\odot}$ was. Dit zijn de eerste structuren die ontstaan.

$$\text{Virial temperature} \sim 740 \text{ K}, kT \sim 0.064 \text{ eV} \propto M^{\frac{2}{3}} (1 + z_{coll})$$

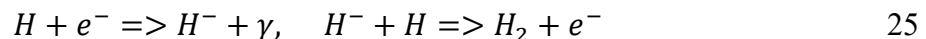
$$\text{Virial radius} \sim 0.43 \text{ kpc}$$

$$\text{Baryon density} \sim 0.016 \text{ cm}^{-3} \propto \Delta_{vir} \rho_{crit}(z)$$

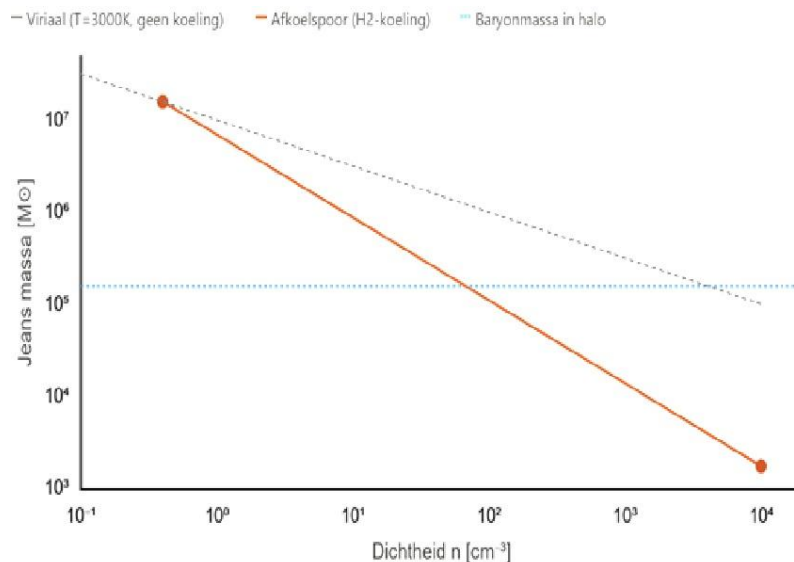
$$\mu = 1.22 \text{ (neutral gas).}$$

Het gas heeft een erg lage metalliciteit waardoor koeling bij temperaturen $\leq 10^4 \text{ K}$ veel minder efficiënt is. **De viriaal temperatuur van dwergstelsels ($\sim 1000 \text{ K}$) is te laag voor Ly- α koeling. Het gas kan wel koelen via H₂ koeling** Dat kan leiden tot de vorming van de eerste (Pop III) sterren en misschien zwarte gaten. [First Light - Abraham Loeb](#)

4.3.1 H₂ koeling en de vorming van de eerste sterren



Koeling vindt plaats door excitatie van rotatie overgangen door botsingen bij temperaturen boven 200 K gevolgd door uitzending van γ (quadrupool rotatie overgangen; de laagste heeft een energie van 512 K). Bij lage dichtheden overheerst de koeling. Het gas zal dan snel koelen ($t_{cool} < t_{ff}$) en dieper de potentiaalput van de DM inzakken bij gelijkblijvende temperatuur van 200 K. Dat verandert wanneer het gas dichtheden bereikt van $n \geq 10^3 - 10^4 \text{ cm}^{-3}$. Het gas wordt dan sneller door botsingen gede-exciteerd ($\propto n^2$) dan door uitzending van fotonen ($\propto n$). Er ontstaat dan een nieuw viriaal gewicht waarbij het gas langzamer koelt ($t_{cool} > t_{ff}$) en de toename van de dichtheid veel langzamer verloopt. Dat is het stagnatie punt (loitering point) rechtsonder in de grafiek (gemaakt m.b.v. Claude).



De Jeans massa van het dwergstelsel was $5 \cdot 10^6 M_{\odot}$ bij een temperatuur van 1000 K . Wanneer de temperatuur is gedaald tot 200 K en een dichtheid van 10^4 cm^{-3} (het stagnatie punt) is de Jeans massa gedaald naar $10^3 M_{\odot}$.

$$M_J \sim (10^2 - 10^3) M_{\odot} \left(\frac{T}{200 \text{ K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad 26$$

De gaswolk fragmenteert. Hieruit zouden de eerste sterren (populatie III) met massa's van $10^2 - 10^3 M_{\odot}$ kunnen zijn ontstaan. De eerste sterren zouden dus heel zwaar en kortlevend zijn geweest. Ze zenden tijdens hun korte felle leven veel straling uit waardoor het neutrale gas in hun omgeving wordt op geïoniseerd. **Het begin van het tijdperk van re-ionisatie!**

De koeling van het oergas in het vroege heelal staat in contrast tot koeling in het huidige heelal waarin de fractie metalen door de opeenvolgende ster generaties is toegenomen. De koeling kan via stofdeeltjes. Dat werkt tot 10 K . De Jeans massa voor koele gaswolken is daardoor sterk afgenomen tot de huidige waarde in de orde van $1 M_{\odot}$.

4.3.2 Stervorming toen en nu

H2 koeling

Vibratie toestanden: $E_{\text{vibr}} \sim 0.5 \text{ eV}$, $\sim 2.4 \mu\text{m}$ $T \sim 6000 \text{ K}$. Te heet

Rotatie overgangen $E_{\text{vibr}} \sim 45 \text{ meV}$, $T \sim 200 \text{ K}$ (quadrupool). Dit kan het gas afkoelen tot 200 K , maar niet lager. **→ protosterren van $100 M_{\odot}$**

CO-koeling

In moderne moleculaire wolken is CO de dominante straler:

Laagste rotatie overgangen $E_{\text{vibr}} \sim 0.48 \text{ meV}$, $T \sim 10 \text{ K}$ (dipool)

→ sterren van $1 M_{\odot}$

Sterpopulaties.

1. Populatie III: ($z \sim 10 - 20$) gevormd uit oergas ($\text{H} + \text{He}$). Koeling via H_2 tot 200 K . Alleen massieve sterren $100 - 1000 M_{\odot}$

2. Populatie II: ($z \sim 1 - 10$) lage Z (=metalliciteit): bolhopen, halo
3. Populatie I: ($z \sim 0 - 1$) hogere Z : schijf, spiraalarmen, typische sterrenmassa $1 M_{\odot}$

In Appendix 2 worden de verschillen tussen de koeling in primordiale wolken en die in de huidige sterrenstelsels samengevat.

4.4 De vorming van jonge sterrenstelsels

Sterrenstelsels die later ontstaan met massa $10^8 M_{\odot}$ bij $z \sim 4$ tot $10^{12} M_{\odot}$ bij $z \sim 1$ hebben viriaal temperatuur $\geq 10^4 K$. Daardoor kan de baryonische materie in die stelsels sneller koelen door Ly- α straling en bremsstrahlung. Het oergas is dan inmiddels al wat rijker aan metalen geworden. Als het gas dan verder koelt kan het sterren vormen en verschijnen de sterrenstelsels zoals wij ze kennen.

$$T = \frac{1}{3} \frac{m_p}{k} v^2 = \frac{1}{3} \frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{1.38 \cdot 10^{-23}} (2 \cdot 10^5)^2 = 1.6 \cdot 10^6 K \left(\frac{v}{200 \text{ km s}^{-1}} \right)^2 \quad 27$$

Het viriaal theorema:

$$\left(\frac{v}{200 \text{ km s}^{-1}} \right)^2 \sim \left(\frac{M_{gal}}{10^{12} M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{gal}}{100 \text{ kpc}} \right)^{-1} \quad 28$$

De viriaal temperatuur wordt dan

$$T_{vir} = 1.6 \cdot 10^6 K \left(\frac{M_{gal}}{10^{12} M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{gal}}{100 \text{ kpc}} \right)^{-1} \quad 29$$

De temperatuur schaal als $T_{vir} \propto M^{2/3} \rho_{un}^{1/3} (z_{coll}) \propto M^{2/3} (1 + z_{coll})$. Daardoor gaat de viriaal temperatuur van 10^6 tot $10^{12} M_{\odot}$ met een factor 1300 omhoog naar $10^6 K$, terwijl de dichtheid in het gecollabeerde systeem lager wordt en de koelingstijd bij massa's $> 10^{12} M_{\odot}$ te lang wordt om sterren te vormen. Onze Melkweg heeft dus een massa die aan de hoge kant is voor een sterrenstelsel waarin nog sterren gevormd kunnen worden.

4.5 De vorming van de Melkweg

Melkwegstelsel halo: $M_{DM}: 10^{12} M_{\odot}$, $t_{coll} \sim 7 \text{ Gyr}$, $z \sim 1$

De Melkweg hoort bij de grotere sterrenstelsels waar nog stervorming plaatsvindt. Er zijn grotere stelsels zoals de grote elliptische stelsels in de centra van rijke clusters. Die zijn waarschijnlijk gevormd door fusie van sterrenstelsels tijdens de vorming van de cluster. Het gas in de stelsels is te heet om nog sterren te vormen.

Virial temperature: $\sim 10^6 K$, $kT \sim 84 \text{ eV}$ (Ionisatie energie H is 13.6 eV)

Virial radius: $\sim 150 \text{ kpc}$

Mean baryon density: $n_b \sim 6 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-3} \sim 10^{-24} \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 0.59$ (fully ionized plasma).

Hot coronal gas; cooling by thermal bremsstrahlung with $t_{cool} \gg t_{dyn}$ in outer halo.

Gas in de halo:

Het gas is met een temperatuur $>10^4 K$ nog wel in staat te koelen via bremsstrahlung en via Ly- α straling, maar de koelingstijd is vergelijkbaar met de leeftijd van het heelal en de temperatuur is hoger is dan T_{Jeans} en de gaswolk kan dus niet fragmenteren. Hieronder een paar formules die dat laten zien. Het gas in de halo koelt dus langzaam en zal dan geleidelijk aan naar de schijf vallen.

Dichtheid DM halo: $\sim 8 \times (125-1000) \rho_{un} \sim 10^{-23} - 10^{-22} \text{ kg m}^{-3}$

$$\rho_{DM} \sim 10^{-23} \text{ kg m}^{-3} \left(\frac{M_{DM}}{10^{12} M} \right) \left(\frac{R}{100 \text{ kpc}} \right)^{-3} \quad 30$$

$$T_{vir} \sim 1.5 \cdot 10^6 K \left(\frac{M_{DM}}{10^{12} M} \right) \left(\frac{R}{100 \text{ kpc}} \right)^{-1} \quad 31$$

De gemiddelde dichtheid van de baryonen is een factor 6 kleiner dan die van de DM. De temperatuur is daardoor hoger dan de Jeans temperatuur.

$$T_{Jeans} \sim 2 \cdot 10^5 K \left(\frac{M_{bar}}{10^{11} M} \right) \left(\frac{R}{100 \text{ kpc}} \right)^{-1} \quad 32$$

Jeans Mass Calculator — Star Formation, Jeans Length & Collapse

De Jeans mass voor metaal-arm geïoniseerd gas:

$$M_{Jeans} = 10^{13} M_{\odot} \left(\frac{T}{10^6} \right)^{3/2} \left(\frac{\rho_{bar}}{10^{-24} \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad 33$$

Voor een CO gedomineerde wolk is die massa een factor ~ 10 kleiner.

$$R_{Jeans} \sim 150 \text{ kpc} \left(\frac{T}{10^6} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_{DM}}{2 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad 34$$

$$\rho_{halo, bar} = 10^{-24} \text{ kg m}^{-3} \left(\frac{M_{bar}}{10^{11} M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{100 \text{ kpc}} \right)^{-3} \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ baryonen cm}^{-3} \quad 35$$

$$t_{cool} (Ly - \alpha) = \frac{3nkT}{n^2 \Lambda_{\alpha}(T)} \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ yr} \left(\frac{T}{10^6 K} \right) \left(\frac{\rho_b}{10^{-24} \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{\Lambda_{\alpha}(T = 10^6)}{10^{-23} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}} \right)^{-1} \quad 36$$

$$t_{ff, DM} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim 10^9 \text{ yr} \left(\frac{\rho}{10^{-23}} \right)^{-1/2} \quad 37$$

We zien dat de vrije val tijd in ons stelsel kort genoeg is, maar dat de koelingstijd van het gas in de halo langer is dan de leeftijd van het heelal. De gemiddelde dichtheid binnen 10 kpc is een factor 100 hoger dan de gemiddelde dichtheid in de halo. Daar vinden we behalve heet gas ook koele neutrale wolken ($T \sim 10^4 \text{ K}$, $\rho \sim 10^{-24} \text{ kg m}^{-3}$, $n = 0.01 \text{ cm}^{-3}$) waarin sterren gevormd worden. De condities lijken daar op die in het dwergstelsel hierboven, behalve dat de metalliciteit aanzienlijk hoger is zodat sterren ter grootte van $1 M_{\odot}$ gevormd kunnen worden.

4.5.1 Koeling in onze Melkweg op dit moment

Bij $T \sim 10^5\text{--}10^6 \text{ K}$ — rechts van de Lyman- α piek in de koelcurve zitten we in het gebied van geïoniseerde metaallijnen. Dat heeft twee gevolgen:

Ten eerste is de koeling bij $T \sim 10^5 \text{ K}$ juist **efficiënt** — we zitten precies op de brede metaalpiek van C, O en Fe in de koelcurve. Metaalrijk gas kan hier goed afkoelen.

Ten tweede verloopt de koeling in twee stappen. Het hete virale gas ($10^5\text{--}10^6 \text{ K}$) koelt eerst via metaallijnen naar $\sim 10^4 \text{ K}$ — de Lyman- α temperatuur. Daar stagneert het even door de scherpe dip in de koelcurve net boven 10^4 K . Vervolgens koelt het verder via atomaire en moleculaire koeling naar de temperaturen waarop stervorming mogelijk is.

4.5.2 De hiërarchische opbouw van sterrenstelsels

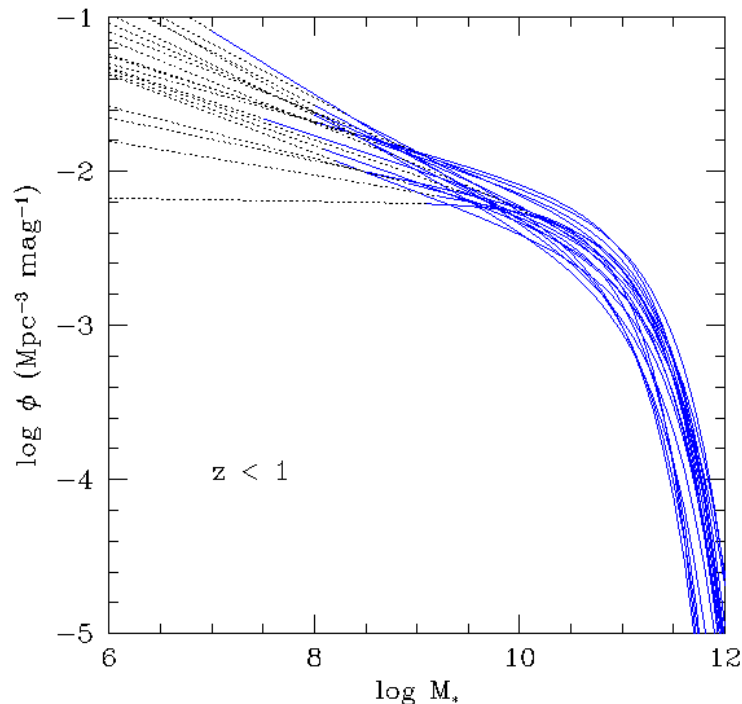
De Melkweg is niet in één keer ontstaan uit één grote gaswolk. De opbouw verliep **bottom-up**, in overeenstemming met het standaard kosmologische model (ΛCDM):

De eerste structuren die samenvielen waren kleine donkere-materie halo's van $\sim 10^6\text{--}10^8 M_{\odot}$ — precies de schaal waarop H_2 -koeling werkt en Pop III sterren ontstaan. Die fuseerden vervolgens tot grotere halo's, die op hun beurt fuseerden, enzovoort. De baryonen volgden de donkere materie.

4.6 Grote clusters ($z \sim 0 - 1$)

Grotere massa's ($M = 10^{12} - 10^{14} M_{\odot}$, $\rho \sim 10^{-24} - 10^{-25} \text{ kg m}^{-3}$) dan die zoals de Melkweg ontstaan uit lagere overdichtheden die instorten tot systemen met Virial temperature: $\geq 10^7 \text{ K}$, en $R \sim 1 - 10 \text{ Mpc}$. Dergelijke systemen hebben een vormingstijd en koelingstijd (bremsstrahlung, gaat met $T^{1/2}$ en de koelingstijd is $t_{cool} \propto T^{1/2}/\rho$) die vergelijkbaar of groter is dan de leeftijd van het heelal. Tijdens de vorming van deze clusters kunnen kleinere fluctuaties uitgegroeid zijn tot sterrenstelsels, maar die stelsels zullen niet veel groter zijn dan sterrenstelsels zoals de Melkweg.

4.7 Karakteristieke massa van sterrenstelsels



1607.03909v2

Mass ($M_{\odot}$)	z_{coll}	$T_{vir}(K)$	$n_{bar} (cm^{-3})$	Cooling	$t_{cool} (Gyr)$	$\frac{t_{cool}}{t_{dyn}}$
10^6	6.2	$7.4 \cdot 10^2$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	H2 (laag %)	1.5	5.6
10^8	4.2	$1.1 \cdot 10^4$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	Ly- α (coll exc.)	$7 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
10^{10}	2.3	$7.7 \cdot 10^4$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	Ly- α peak	$2 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$
10^{12}	0.75	10^6	$6.4 \cdot 10^{-4}$	Bremsstrahlung	5.5	3

Koeling is dus belangrijk voor massa's van 10^6 tot $10^{12} M_{\odot}$. In systemen van 10^6 is de koelingstijd nog enkele malen groter dan de dynamische tijd. Toch is die tijd waarschijnlijk voldoende zodat de eerste sterren geboren kunnen worden.

Bij grotere massa's wordt de cooling efficiënter tot de viriaal temperatuur wordt bereikt waar bremsstrahlung de overhand krijgt. Dit verklaart precies de karakteristieke schaal $10^{10} - 10^{12} M_{\odot}$ van de halos van de sterrenstelsels die we "zien" (of waarin sterren zijn gevormd). In dit gebied is de koeling het meest efficiënt en wordt dus de grootste fractie van baryonen in sterren omgezet. Voor massa's groter dan $\sim 10^{12} M_{\odot}$ wordt de koelingstijd te groot om sterrenstelsels te vormen. Massieve sterrenstelsels in de centrale delen van grote clusters zijn waarschijnlijk gevormd door fusie van kleinere stelsels.

5. Wat kan de zwaartekracht tegenhouden.

Sterren zoals de zon kunnen lange tijd in viriaal evenwicht zijn waarbij hun energieverliezen worden gecompenseerd door de productie van kernfusie energie totdat de brandstof in de kern

(H) is gefuseerd tot He. De kern zal dan afkoelen en onder invloed van de zwaartekracht krimpen totdat er een nieuw evenwicht ontstaat bij een hogere centrale temperatuur waarbij nieuwe brandstof (Helium) gefuseerd wordt tot zwaardere kernen (C). De zon zal uiteindelijk eindigen als compacte witte (en uiteindelijk zwarte dwerg. Sterren die zwaarder zijn dan de zon ($> 8M_{\odot}$) zullen eindigen in een Supernova explosie waarbij de kern instort tot een neutronenster of zwart gat. De eindproducten van sterren zijn dus extreem compacte objecten waarin de zwaartekracht enorm sterk is. Wat zorgt er dan voor dat zo'n object niet verder instort onder zijn eigen zwaartekracht.

Er zijn twee barrières die er voor zorgen dat witte dwergen en neutronensterren niet direct instorten tot zwarte gaten:

1. In het centrum van een witte dwerg is de dichtheid zo hoog dat elektronen bijna boven op elkaar zitten. We noemen dat een gedegenererde toestand waarin het Pauli principe er voor zorgt er voor de gravitatie druk wordt tegengegaan door een toenemende degeneratiedruk. Daardoor kan een witte dwerg de zwaartekracht weerstaan totdat de elektronen relativistisch worden. Dat gebeurt wanneer hij (door massa invangst) zwaarder wordt dan de Chandrasekhar limiet ($\sim 1.4M_{\odot}$). Boven die limiet stort hij in tot een neutronenster.
2. Een neutronenster zal instorten tot een zwart gat wanneer de neutronen relativistisch worden. Dat gebeurt bij een massa $> 3 M_{\odot}$

5.1 De toestandsvergelijking voor witte dwerg en neutronenster.

De toestandsvergelijking geeft de relatie tussen de druk en de dichtheid van een gas of andere toestand van materie. Meestal wordt daarvoor een eenvoudige relatie aangenomen (Appendix 7.5)

$$P \propto \rho^\gamma \quad 38$$

De dichtheid is de energiedichtheid. We kunnen ook een toestandsvergelijking voor de zwaartekracht op schrijven. We weten dat de kinetische energie evenredig is PV . Met viriaal evenwicht:

$$E_{kin} \propto PV \propto \frac{GM^2}{R}$$

kunnen we dit herschrijven als

$$P_{grav} \propto \frac{M^2}{R^4} \propto M\rho R^{-1} \propto M^{2/3}\rho^{4/3} \quad 39$$

(zie ook [7.5.2](#)) We kunnen deze vergelijking opvatten als een “toestandsvergelijking” die beschrijft hoe de gravitatie druk toeneemt wanneer de dichtheid toeneemt). Wanneer je drukevenwicht eist tussen de gravitatie druk en de gasdruk dan volgt (voor waterstofgas)

$$P_{gas} = nkT = \frac{\rho kT}{m_H} = C GM^{2/3}\rho^{4/3} \quad 40$$

en dus :

$$kT = C m_H G \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{M}{R} \approx \frac{m_H G M}{R} \quad 41$$

Dat is de viriaaltemperatuur van bijv een ster zoals de zon. De evenwichtsconditie levert een relatie van de vorm $M(R, T)$ of $T(M, R)$ waarin gemiddelde waarden van de temperatuur en druk worden gebruikt. Om de structuur van de ster te bepalen $(\rho(r), T(r), L(r), \dots)$ zijn meer vergelijkingen nodig.

Witte dwergen en neutronensterren bestaan niet uit gewone materie zoals andere sterren. Ze zijn extreem compact. Dat houdt in dat de elektronen in een witte dwerg en de neutronen in een neutronenster zo dicht op elkaar zitten dat het Pauli principe in werking treedt. We hebben dan te maken met een gedegenererde toestand van het gas. Daardoor wordt de temperatuur sterk afhankelijk van de dichtheid zodat de (degeneratie)druk niet meer afhangt van ρ en T , maar alleen nog maar van ρ .

Voor een (niet gedegenererd) heet (niet relativistisch) gas geldt $E_{kin} \propto p^2$ (zie ook [Appendix 4: Relativistische energievergelijking \(energie en druk\)](#)). Met de De Broglie relatie $p = h/\lambda$ ([zie 5.2](#)) vinden we dan voor de druk

$$P \propto \rho p^2 \propto \rho \lambda^{-2} \quad 42$$

Wanneer de **materie gedegenererd** is geldt dat $\lambda \propto R \propto \rho^{-1/3}$
Daarmee wordt de toestandsvergelijking:

$$P \propto \rho p^2 \propto \rho \lambda^{-2} \propto \rho^{5/3} \quad 43$$

Wanneer je een compacte ster die in evenwicht wordt behouden door de druk van gedegenererde elektronen samendrukt zal de degeneratie druk sterker toenemen dan de druk van de zwaartekracht. De ster kan dus stabiel zijn. Wanneer de massa van de ster en daardoor de gravitatiedruk toeneemt zal de toenemende energiedichtheid er toe leiden dat de energie van de deeltjes toeneemt en uiteindelijk zelfs relativistisch wordt.

Wanneer de materie **relativistisch** wordt geldt:

$$\begin{aligned} E_{kin} &\propto p \\ P &\propto p \propto \rho \lambda^{-1} \\ P &\propto \rho p \propto \rho \lambda^{-1} \propto \rho^{4/3} \end{aligned} \quad 44$$

De ster kan nu niet langer de druk van de zwaartekracht tegenhouden en stort verder in.

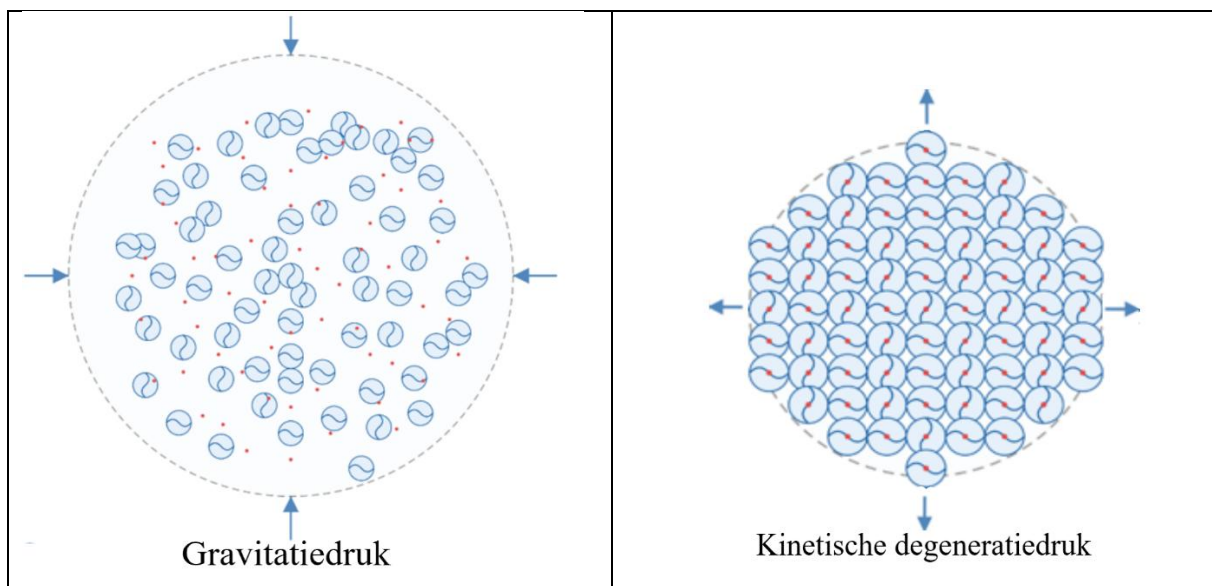
5.2 Van onze zon tot een witte dwerg

In het binnenste van sterren zoals de zon is de temperatuur $\sim 10^7 K$, dat komt overeen met een energie van 1 KeV ($E = k_B T$). Dat is al bijna 100x zo veel als de energie die nodig is om waterstofatomen te ioniseren (13.6 eV). Alle atomen zijn dus geïoniseerd en we hebben te maken met een heet plasma, een mengsel van losse waterstofkernen en elektronen. De

temperatuur van de ster wordt in stand gehouden door kernfusie van waterstof tot helium en verder (als de ster zwaar genoeg is) tot koolstof en zuurstof. Dan stopt de kernfusie en krimpt de ster totdat de zwaartekracht opgevangen wordt door de elektronen die zich in de kern bevinden. Het Pauli principe verbiedt elektronen om in dezelfde kwantumtoestand (zoals de energietoestand) te zitten. Ze kunnen niet bij elkaar op schoot zitten en hebben hun eigen ruimte nodig ter grootte van hun golflengte. De ster krimpt totdat de elektronen een compacte bol vormen die zich verzet tegen de druk van de zwaartekracht. We noemen de toestand van het elektronengas dan “gedegeneerd”. Je kunt de straal van die bol op de volgende manier schatten: Een elektron heeft een golflengte (λ) die samenhangt met zijn impuls volgens (de Broglie)

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad 45$$

Het Pauli principe treedt in werking wanneer de elektronen zo dicht op elkaar zitten dat hun onderlinge afstand $\sim \lambda$ is.



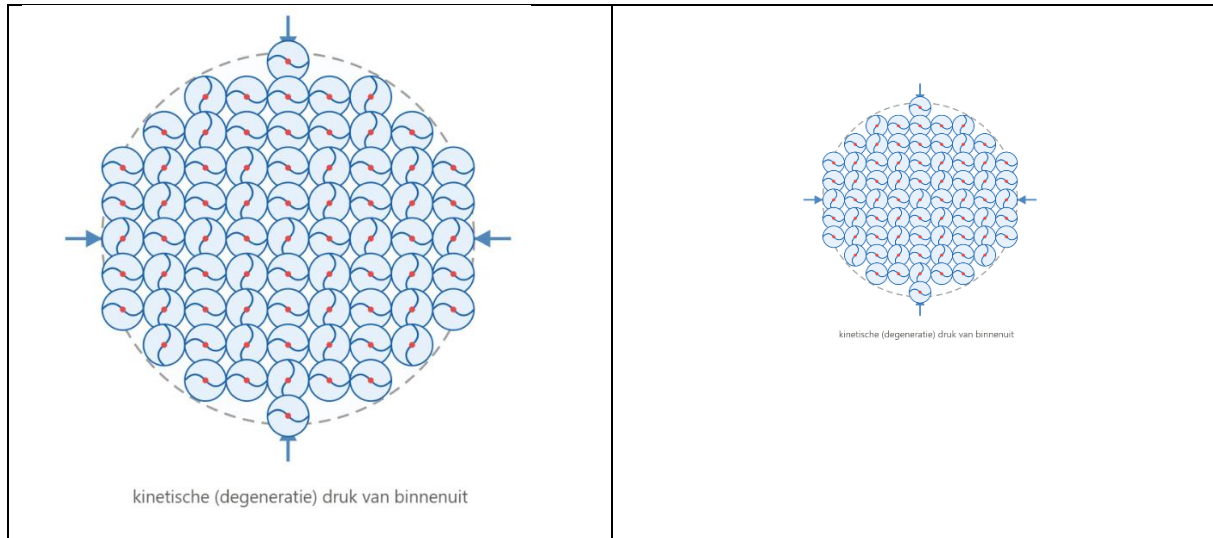
Gemaakt met hulp van Claude AI

Wanneer je het aantal elektronen (N_{el}) kent kun je de straal van die bol schatten met de formule:

$$N_{el} \sim \frac{R^3}{\lambda^3} \quad 46$$

Zo vindt je een elektronendichtheid $n_{el} \sim N/R^3 \sim \lambda^{-3}$. Bij deze dichtheid is het elektronengas gedegeneerd. Het evenwicht wordt dan in stand gehouden door de zgn degeneratiedruk. Wanneer je de zo'n bol samendrukt wordt de Broglie golflengte van de deeltjes kleiner.

--	--



Gemaakt met hulp van Claude AI

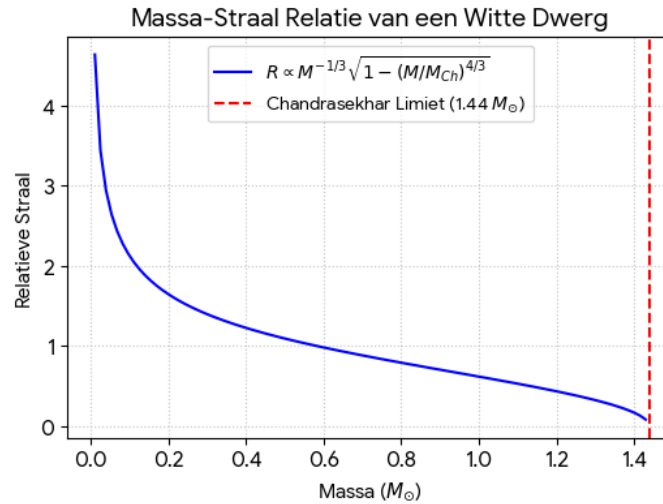
Daarmee wordt de impuls van de deeltjes groter en dus de kinetische energie van de deeltjes groter $E_{kin} \propto p^2 \propto \lambda^{-2}$. In die bol bevinden zich evenveel protonen als elektronen, maar die hebben een veel kleinere golflengte. Bij deze dichtheid zal het gas elektronendegeneratiedruk uitoefenen en de zwaartekracht proberen te weerstaan. We kunnen de kinetische energie van de elektronenbol berekenen door uit te gaan van de Broglie relatie hierboven: $p = \hbar/\lambda \propto \hbar N_{el}^{1/3}/R$. We noemen deze impuls ook wel de Fermi impuls p_F . De kinetische energie is nu

$$E_{kin} = N_{el} \frac{1}{2} \frac{p_F^2}{m_{el}} = N_{el} \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 N_{el}^{2/3}}{m_{el} R^2} \sim \frac{\hbar^2}{m_{el}} \frac{N_{el}^{5/3}}{R^2} \quad 47$$

En de potentiële energie $E_{pot} = GM^2/R$. Het elektronenaantal N_{el} kunnen we gelijk stellen aan M/m_p (of $M/2m_p$ voor Koolstof/Zuurstof). Toepassing van het viriaal theorema geeft dan

$$R \sim \frac{\hbar^2}{GM^{1/3} m_{el} m_p^{5/3}} \quad 48$$

De straal neemt dus af met $M^{-1/3}$. Dat komt overeen met het linker deel van de blauwe dalende lijn in de grafiek hieronder.



5.3 Van Witte Dwerg naar Neutronenster en Black Hole

Een witte dwerg in een dubbelstersysteem kan groeien door invangst van massa afkomstig van de andere ster. Als dat gebeurt kan de dwerg verder in elkaar gedrukt worden. Daarbij worden de golflengtes van de elektronen steeds kleiner, en daarmee hun energie $E_k = p_F^2/2m_{el}$ steeds groter. Uiteindelijk bereiken de elektronen relativistische snelheden. De relativistische uitdrukking voor de energie is

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad 49$$

Wanneer de kinetische energie (de tweede term onder het wortelteken) veel kleiner is dan de rustmassa geldt bij benadering:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \quad 50$$

De kinetische energie is dan $E_{kin} \propto p^2$. Wanneer de kinetische energie groter wordt dan de rustmassa energie wordt de energie gegeven door $\sim 10^{-23}$

$$E \sim E_{kin} \sim pc \quad 51$$

We kunnen de massa van de ster bepalen met de formule

$$E_{kin} \sim N_{el} p_F c = \frac{\hbar N_{el}^{4/3}}{R} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} \quad 52$$

Wanneer we N_{el} gelijk stellen aan M/m_p waarin m_p de protonenmassa ($1.67 \cdot 10^{-27} kg$) dan vinden we

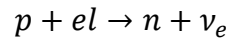
$$M_{ch} \sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2} \sim 1.4 M_{\odot} \quad 53$$

Dit is de maximale massa (Chandrasekhar massa) waarbij de elektronendegeneratiedruk de zwaartekracht nog kan weerstaan. Die massa is van de orde $M_{ch} \sim 1.44 M_{\odot}$ (zie de grafiek hierboven).

Als de ster deze massa bereikt is de gemiddelde energie van de elektronen:

$$E_F \sim p_F c \sim 100 \text{ MeV}$$

Dat is precies het regime waarin de zwakke wisselwerking belangrijk wordt en de reactie



op gang komt. Dit is het “inverse beta verval”. Als de ster zwaarder wordt dan deze massa nemen zowel E_{kin} als E_{pot} toe met $1/R$. Er kan dan geen evenwicht meer ontstaan en de ster stort in waarbij de energie van de elektronen snel toeneemt. Als de kinetische energie $E_F > 1.29 \text{ MeV}$ (het massaverschil tussen een neutron en een proton) wordt de overgang $p + e \rightarrow n + \nu_e$ energetisch gunstig. Bij $E_F \sim 100 \text{ MeV}$ ($M \geq M_{ch}$) gaat het explosief. Wanneer een lichte ster ($M < M_{ch}$) massa krijgt van een nabije ster (in een dubbelster systeem) ontploft de ster als $M = M_{ch}$. Dit is een Type Ia supernova die wordt gebruikt als “standard candle”. De hele ster ontploft en er ontstaat geen neutronenster.

Wanneer de ster zwaar is (8-10 zonsmassa's) kan er een neutronenster ontstaan (Type II supernova). In de neutronenster ontstaat een nieuw viriaal evenwicht dat in stand gehouden wordt door de neutronendegeneratiedruk. Daarvoor geldt ook het Pauli principe, maar neutronen hebben een veel kleinere golflengte en dus kan de straal veel kleiner zijn dan die van een witte dwerg met vergelijkbare massa ($m_{neutron} \sim 1800 m_{el}$, $R_{witte\ dwerg} \sim 600 R_{neutron\ ster}$). Je kunt voor de neutronenster een zelfde formule afleiden voor de bovengrens van de massa. Je hoeft alleen maar de massa van het proton te vervangen door die van het neutron. Dat verschil is zo klein dat je weer op de Chandrasekhar massa ($\sim 1.4 M_{\odot}$) uit zou komen. Voor een nauwkeurige berekening heb je de Algemene relativiteitstheorie nodig, maar ook een beschrijving van de sterke wisselwerking. Het resultaat – afgeleid door Tolman, Oppenheimer en Volkoff wordt dan iets hoger ingeschat dan de Chandrasekhar massa

$$M_{TOV} \sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_n^2} \sim 3 M_{\odot} \quad 54$$

Neutronensterren hebben massa's $M_{neutronenster} < 2 - 3 M_{\odot}$. Een zwaardere neutronenster zal instorten tot een zwart gat.

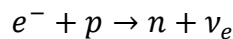
5.4 De energie van een supernova

Energiebron	Energie
Zon — totale nucleaire brandstof	$\sim 10^{44} \text{ J}$
Typische supernova (licht + schokgolf)	$\sim 10^{44} \text{ J}$
Gravitationele ineenstorting	$\sim 10^{46} \text{ J}$
Neutrino's bij kerninstorting	$\sim 3 \times 10^{46} \text{ J}$

De gravitationele energie is dus **100× groter** dan alles wat de supernova aan licht en schokgolven uitstraalt. Dat was de historische aanwijzing — Zwicky en Baade realiseerden zich in 1934 al dat alleen gravitationele ineenstorting genoeg energie levert om de energie van supernovae te verklaren.

Waar gaat die energie naartoe?

Het overgrote deel — zo'n 99% — verdwijnt in **neutrino's**. Bij de massale neutronisatie:



worden er $\sim 10^{58}$ neutrino's geproduceerd, elk met $\sim 10 \text{ MeV}$. Die neutrino's interageren nauwelijks met materie en vluchten in seconden weg. Dat werd spectaculair bevestigd bij de supernova ****SN 1987A****, waarbij aardse detectoren (Kamiokande, IMB) precies de verwachte neutrino-flits registreerden — 3 uur **vóór** het zichtbare licht aankwam. De resterende $\sim 1\%$ drijft de schokgolf die de buitenste lagen wegblaast — dat is de supernova die we zien.

6. Het einde van alle structuur in het heelal

6.1 De grootste gebonden structuren

De sterrenstelsels in de grootste clusters zoals bijv. de Coma cluster hebben (peculiere) snelheden in de orde van 1000 km s^{-1} . Hun viriaal massa is dan

$$M_{vir} \sim \langle v^2 \rangle \frac{R_{vir}}{G} \sim 5 \cdot 10^{14} M_{\odot} \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{1000 \text{ km s}^{-1}} \right) \left(\frac{R_{vir}}{2 \text{ Mpc}} \right) \quad 55$$

Grotere structuren zoals Laniakea ($\sim 10^{17} M_{\odot}$, $\sim 160 \text{ Mpc}$ doorsnede) of de Shapley Supercluster zijn niet als geheel gravitationeel gebonden. De gemiddelde dichtheid in deze structuren ligt vaak onder de kritieke drempel voor collaps tegen de achtergrond van de Donkere Energie (DE). De voorwaarde voor collapse is

$$\frac{GM}{R^3} > \frac{8\pi G \rho_{\Lambda}}{3} \quad 56$$

De lokale dichtheid moet dus *goter* zijn dan $2\rho_{\Lambda} \approx 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$. Onze Melkweg maakt ook deel uit van de Lokale groep ($R \sim 3 \text{ Mpc}$) die bestaat uit ~ 80 sterrenstelsels waarvan de Melkweg en Andromeda de grootste zijn. We lijken geen deel uit te maken van een groter gebonden systeem zoals de Virgo Supercluster of Laniakea.

Gebonden structuren kunnen nog lange tijd licht uit blijven zenden. Dat licht is niet gebonden aan onze groep en zal ons verlaten. Dat geldt ook voor materie die uit de groep geslingerd wordt met een snelheid die groter is dan de ontsnappingssnelheid. Alles wat onze groep verlaat zal door de Donkere Energie met toenemende snelheid van ons vandaan vliegen en uiteindelijk over onze Event Horizon heen verdwijnen.

6.2 Van iets naar Niets

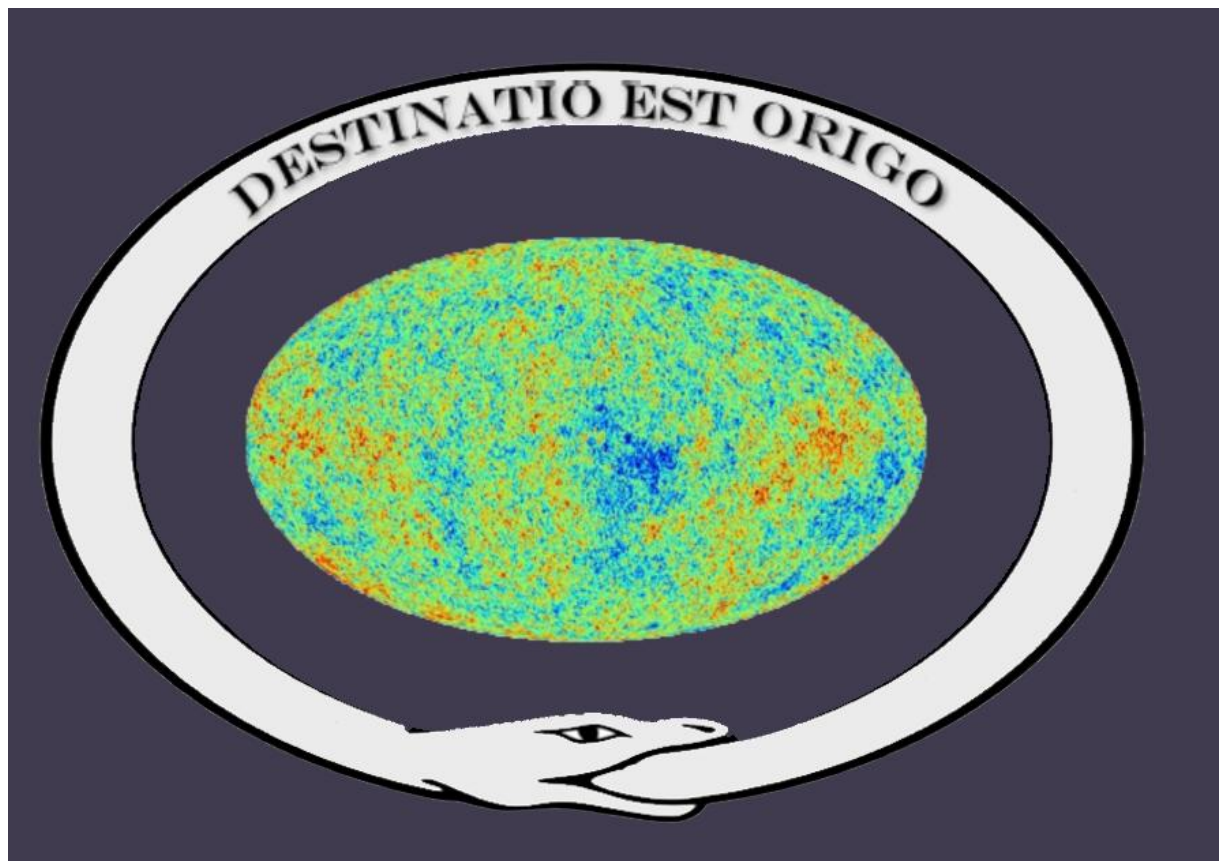
Wat er van onze groep overblijft zal geleidelijk aan compacter worden. Daardoor zullen zwarte gaten voorlopig groeien. Niet alleen door materie via een accretieschijf in te vangen, maar ook doordat twee of meer lichamen die in een gezamenlijk zwaartekrachtsveld om elkaar heen bewegen altijd zwaartekrachtstraling zullen uitzenden waardoor het systeem energie verliest en er uiteindelijk één zwart gat overblijft. Voor een ster op een baan met pericenter van $r_p = 100$ kpc van het centrum van de Melkweg op een elliptische baan rond het centrum beweegt duurt het

$$t_{grav.radiation} \sim 10^{37} \text{ yr} \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{-2} \left(\frac{m}{1 M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{r_p}{100 \text{ kpc}} \right)^4$$

Het zwarte gat dat overblijft zal Hawking straling uitzenden tot het verdwenen is. Dat duurt ongeveer

$$t_{Hawking} \sim 10^{86} \text{ yr} \left(\frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^3$$

Die Hawking straling wordt door de uitdijing van het heelal uitgerekt en verdwijnt over de horizon zodat ons zichtbare heelal uiteindelijk weer een vacuüm wordt. Maar ---wie weet --- misschien blijft er nog een enkel stabiel deeltje zoals een elektron over ($m_{el} \sim 10^{60} M_{\odot}$).



7. Appendices

7.1 Appendix 1 Condities bij $z \sim 3400$

Bij $z_{eq} \sim 3400$ ($t \approx 50.000 \text{ yr}$) is de overgang van een heelal waarin de dynamica wordt gedomineerd door de dichtheid van de straling naar die van de materie ($\rho_{rad} = \rho_m$). De dichtheid van de straling en materie worden gegeven door

$$\begin{aligned} z > z_{eq} \quad \rho_{rad} &\propto a^{-4}, \quad a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \\ z < z_{eq} \quad \rho_m &\propto a^{-3}, \quad a(t) \propto t^{2/3}, \quad c_s \sim c/\sqrt{3} \\ \rho_{tot}(z_{eq}) &= 2.2 \cdot 10^{-16} \text{ kg m}^{-3} \end{aligned}$$

De temperatuur wordt gegeven door $T_{eq} \approx 0.75 \text{ eV} = 8700 \text{ K}$. Tot aan recombinitie heerst er thermisch evenwicht in het heelal. Alle componenten hebben dezelfde temperatuur. De

elektronen volgen de temperatuur van de fotonen via Compton verstrooiing en de protonen volgen de temperatuur van de elektronen via Coulomb verstrooiing. Dat verandert pas bij recombinitie waar de waterstof temperatuur sneller af gaat koelen dan de fotonen temperatuur. De protonen en elektronen zijn bij z_{eq} al lang niet relativistisch meer. De relativistische uitdrukking voor de energie van de elektronen is (zie ook Appendix 4)

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2 c^2$$

Met $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \approx \frac{1}{2}p^2/m = \frac{3}{2}kT$ wanneer geldt dat

$$\frac{E_{kin}}{m_{el}c^2} = \frac{\frac{3}{2}kT}{m_{el}c^2} = \frac{0.75 \text{ eV}}{511 \cdot 10^3 \text{ eV}} \ll 1$$

Voor protonen is die verhouding nog veel kleiner door hun grotere massa. De druk van de protonen wordt gegeven door $P_p = n_p kT$, waarin n_p het aantal protonen per volume eenheid is. De totale druk van het geïoniseerde gas wordt gegeven door

$$P_{gas} = P_p + P_{el} = 2 P_p = 2 n_p kT$$

De energiedichtheid van fotonen is

$$\varepsilon_{fotonen} = aT^4 = \frac{4\sigma}{c}T^4 = n_{fotonen} \langle E_{foton} \rangle \approx 2.7 n_{fotonen} kT$$

$$a = \frac{4\sigma}{c} T^4 = 7.5 \cdot 10^{-16} T^4 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

De druk van de fotonen is (zie ook Appendix 7.5)

$$P_{fotonen} = \frac{1}{3} \varepsilon_{fotonen} = \frac{1}{3} a T^4 \approx 0.9 n_{fotonen} kT$$

Daarmee wordt de verhouding

$$\frac{P_{fotonen}}{P_{gas}} = \frac{\frac{1}{3} a T^4}{2n_p kT} = \frac{0.9 n_{fotonen} kT}{2n_p kT}$$

Meer algemeen is de verhouding tussen de fotonendruk en de druk van de materiedeeltjes in het heelal gelijk aan

$$\frac{P_{fotonen}}{P_{gas}} = 0.9 \frac{n_{fotonen}}{n_{totaal}} = 0.9 \frac{n_{fotonen}}{n_b} \frac{n_b}{n_{totaal}}$$

Hier verschijnt een belangrijke parameter van het heelal: de foton – baryon verhouding

$$\eta = \frac{n_{fotonen}}{n_b} \approx 10^9$$

Deze parameter – en daarmee de drukverhouding tussen fotonen en baryonen – is nauwelijks afhankelijk van de roodverschuiving.

Bij z_{eq} worden de energie dichtheden van straling en materie aan elkaar gelijk, maar de druk blijft volledig bepaald door de fotonen. Dat verklaart ook dat het gas geen invloed heeft op de geluidssnelheid in het foton-baryonplasma. De geluidssnelheid wordt gegeven door (Appendix 7.5)

$$c_s^2 \approx \frac{P_{fotonen}}{\rho_{fotonen} + \rho_b} \approx \frac{c^2}{3(1 + \rho_b/\rho_{fotonen})}$$

Pas na recombinitie ($z \approx 1100$) ontkoppelen fotonen dynamisch, en pas rond $z \sim 200$ ontkoppelt ook de temperatuur zelf.

7.2 Appendix 2 Afleidingen Viriaal theorema

7.2.1 Twee deeltjes systeem bijv. in een Keplerbaan

$$\begin{aligned}\langle E_{kin} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} m \int_0^T \frac{d^2 r}{dt^2} r dt - \frac{dr}{dt} r \Big|_0^T \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} m \int_0^T \frac{GM}{r} dt - 0 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle\end{aligned}$$

Op de eerste integraal wordt partiële integratie toegepast. Resultaat:

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$$

7.2.2 Veel deeltjes systeem

Deeltjes met positie $\vec{r}_i$ en impuls $\vec{p}_i = m \vec{v}_i$. Definieer een functie van impuls en positie

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

Voor een stabiele toestand moet de tijdgemiddelde van deze functie gelijk aan 0 zijn.

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \left\langle \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \right\rangle = \left\langle \sum_i F_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle + \left\langle \sum_i m_i v_i^2 \right\rangle = \langle E_{pot} \rangle + 2\langle E_{kin} \rangle = 0$$

We hadden hier ook de functie $I = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$ kunnen kiezen. Voor een systeem in evenwicht moet ook gelden dat de gemiddelde radiale snelheid van de deeltjes niet verandert:

$$\left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 0$$

Hiermee kunnen we ook laten zien dat dan moet gelden: $\langle E_{pot} \rangle + 2\langle E_{kin} \rangle = 0$

7.2.3 2de hoofdwet van de thermodynamica

Tenslotte kunnen we ook laten zien dat aan het viriaal theorema wordt voldaan als de entropie niet verandert. Volgens Boltzmann is de entropie voor N deeltjes binnen een bol met straal R en totale massa M gegeven door $S = k_B \ln W$ waarin

$$W \propto \sum_i (r_i^3 v_i^3)^N$$

Hiermee vinden we

$$S = k_B \ln W = k_B N \ln(R^3 E_{kin}^{3/2}) + \text{constante}$$

met $E_{kin} = E_{totaal} - E_{pot} = E_{totaal} + GM^2/R$. Wanneer we eisen dat de entropie niet verandert wanneer we de straal van de bol veranderen vinden we

$$\frac{dS}{dR} = \frac{3kN}{R} \left(1 + \frac{E_{pot}}{2E_{kin}} \right) = 0 \quad \Rightarrow E_{kin} = -\frac{1}{2} E_{pot}$$

7.2.4 Viriaal theorema en het Jeans criterium

Het is niet moeilijk om te laten zien dat het Jeans criterium, nl dat de vrije val tijd vergelijkbaar moet zijn met de tijd die een drukgolf nodig heeft om de straal R af te leggen ($t_{sound} \sim t_{free\ fall}$), overeenkomt met het viriaal evenwicht: We zagen dat we met dat criterium de Jeans straal en de Jeans massa vonden

$$R_J \sim \frac{c_s}{G^{1/2} \rho^{1/2}} \quad M_J = \frac{1}{2} \frac{c_s^3}{G^{3/2} \rho^{1/2}}$$

Deze twee formules leveren dan op

$$\frac{1}{2} c_s^2 \sim \frac{GM_J}{R_J}$$

De kinetische energie van het gas is $E_{kin} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \langle v^2 \rangle = 3k_B T / m$. De geluidssnelheid is daarmee vergelijkbaar: $c_s^2 = \gamma P / \rho = \gamma k_B T / m$ (Appendix 7.5).

7.2.5 Viriaal theorema en hydrostatische evenwicht

De gravitatie-druk in een bolvormig graviterend systeem wordt gegeven door

$$dP_{grav} = - \frac{Gm(r)\rho(r)dr}{r^2}$$

Vermenigvuldig beide kanten met $4\pi r^3$ en integreer van $r = 0$ tot R . Het rechterlid wordt dan met $dm = 4\pi r^2 \rho dr$

$$- \int_0^R \frac{Gm(r)}{r} dm = E_{pot}$$

Het linker lid wordt (met partiele integratie:

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP_{grav}}{dr} dr = 4\pi r^3 P_{grav} \Big|_0^R - \int_0^R 3P_{grav} 4\pi r^2 dr = -3 \int_0^R P_{grav} dV = -3P_{grav} V$$

De randterm is gelijk aan 0, omdat de druk bij R gelijk aan 0 wordt. De druk is gelijk aan

$$-P_{grav} V = \frac{2}{3} E_{kin}$$

Daarmee vinden we weer $2E_{kin} = E_{pot}$

We kunnen nu ook een toestandsvergelijking (relatie tussen gemiddelde gravitatie-druk $\langle P_{grav} \rangle$ en gemiddelde dichtheid) afleiden voor een zelfgraviterende gaswolk. We schrijven de bindingsenergie als

$$-E_{pot} = \alpha \frac{GM^2}{R} = -3 \int_0^R P_{grav} dV$$

We berekenen nu de gemiddelde druk $\langle P_{grav} \rangle$

$$\langle P_{grav} \rangle = \frac{1}{V} \int_0^R P dV = \frac{1}{3V} \alpha \frac{GM^2}{R} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}$$

De gemiddelde dichtheid $\langle \rho \rangle = M/V$, en vinden dan

$$\langle P_{grav} \rangle = C GM^{2/3} \rho^{4/3}$$

met $C = \alpha(4\pi)^{1/3} 3^{-4/3} \approx 0.2$ voor $\alpha = 3/5$. Het gaat om de evenredigheid $\langle P \rangle \propto M^{2/3} \rho^{4/3}$. De index $\gamma = 4/3$ van het dichtheidsprofiel is precies de kritische “polytrope index” (Appendix 7.5). Sterren die een dichtheidsprofiel hebben met $\gamma < 4/3$ zijn instabiel tegen instorting onder hun eigen zwaartekracht. Dat is de reden dat witte dwergen en neutronensterren instorten wanneer hun massa te groot wordt. Hun index wordt kleiner dan $\gamma = 4/3$ waardoor hun weerstand tegen de zwaartekracht het begeeft (Hoofdstuk 5).

7.2.6 Het Viriaal theorema en de straal van de zon.

In de sterrenkunde/kosmologie speelt het viriaal theorema een erg belangrijke rol. De objecten die we bestuderen – sterren, sterrenstelsels, clusters van sterrenstelsels – zijn in evenwicht, of proberen in evenwicht te komen. Dat evenwicht wordt beschreven door het viriaal theorema dat zegt dat de potentiële gravitatie energie E_{pot} in evenwicht is met de kinetische energie E_{kin}

$$2E_{kin} = -E_{pot}$$

(Zie de afleidingen in de Appendix van het document “Straling in het heelal en de vorming van Massieve Zwarte Gatē”). Deze uitdrukking kan direct gebruikt worden bij de schatting van de massa van een cluster van sterrenstelsels door de beweging van de sterrenstelsels in de cluster en de straal van de cluster te meten of de massa van een sterrenstelsel uit zijn rotatiecurve.

In het geval van sterren (of gaswolk) kun je dit evenwicht ook uitdrukken in een hydrostatisch drukevenwicht. Hieronder is dat uitgewerkt. P is de druk, ρ de dichtheid, v de snelheid van de atomen, M de massa van de ster, V het volume, R de straal van de ster en r de afstand ($< R$) tot het centrum van de ster.

$$P = \frac{1}{3} \rho v^2 \sim \frac{1}{3} \frac{M}{V} v^2 (= nk_B T) = \frac{2}{3} E_{kin}/V$$

$$\Rightarrow PV = \frac{2}{3} E_{kin}$$

$$dP = - \frac{Gm(r)\rho(r)dr}{r^2}$$

$$\rightarrow PV \sim -\frac{1}{3} \frac{GM^2}{R} = -\frac{1}{3} E_{grav}$$

met hetzelfde resultaat: $2E_{kin} = -E_{pot}$.

Hiermee vinden we ook de Jeans criterium voor een gaswolk of een dichtheidsfluctuatie: De gravitatiekracht is sterker dan de inwendige druk wanneer $2E_{kin} < -E_{pot}$ ofwel $P < \frac{GM^2}{3R} E_{grav}/V$.

Hierboven zagen we al dat in dat geval de geluidssnelheid in het gas groter is dan de vrije val snelheid in de potentiaalput ($t_s > t_{ff}$). Zo vinden we de Jeans lengte $R_J \sim c_s / (G\rho)^{1/2}$ en de Jeans massa: $M_J \sim \frac{4\pi}{3} \rho R_J^3$.

De gemiddelde dichtheid van de Melkweg bedraagt ongeveer $1.3 \cdot 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$. Dat is ook ongeveer de dichtheid van een moleculaire wolk waaruit sterren zoals de zon is ontstaan. De gemiddelde dichtheid van de zon is ongeveer 1400 kg m^{-3} . Het dichtheidscontrast is dus

$$\frac{\rho_{\odot}}{\rho_{MW}} = \frac{1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{1.3 \times 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}} \approx 10^{24}$$

Dat dichtheidscontrast staat in schril contrast met de het dichtheidscontrast dat we met het viriaal evenwicht kunnen berekenen. De conclusie moet zijn dat de samentrekkende wolk waaruit de zon is ontstaan een grote hoeveelheid energie moet hebben uitgestraald. Die hoeveelheid energie kunnen we schatten met door het verschil in energie tussen begin- en eindtoestand te berekenen:

$$\Delta E \sim \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{\odot}} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{wolk}}$$

Omdat $R_{\odot} \ll R_{wolk}$ kunnen we de tweede term verwaarlozen:

$$\Delta E \approx \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{\odot}}$$

Deze formule kunnen we algemeen formuleren:

Als een object met massa M en straal R zich in een evenwichtstoestand bevindt moet het een hoeveelheid energie hebben uitgezonden die van de orde van grootte GM^2/R .

Als we dit uitrekenen voor de zon vinden we $G = 6.67 \times 10^{-11}$, $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_{\odot} = 7 \times 10^8 \text{ m}$:

$$\Delta E \approx \frac{3}{5} \frac{3 \times 6.67 \times 10^{-11} \times (2 \times 10^{30})^2}{5 \times 7 \times 10^8} \approx 4 \times 10^{41} \text{ J}$$

Hieruit volgt direct de **Kelvin-Helmholtz-tijdschaal**: hoe lang zou de zon alleen op gravitationele energie kunnen schijnen?

$$t_{KH} = \frac{\Delta E}{L_{\odot}} = \frac{4 \times 10^{41} \text{ J}}{3.8 \times 10^{26} \text{ J s}^{-1}} \approx 6 \times 10^{14} \text{ s} \approx 30 \text{ miljoen jaar}$$

We weten nu dat de aarde – en dus ook de zon – meer dan $4.5 \cdot 10^9$ jaar oud zijn. De zon zou

dan al lang afgekoeld zijn. We weten inmiddels ook dat de temperatuur van de zon op peil gehouden wordt door kernfusie. Om dat proces op gang te laten komen moet de (protostellaire) wolk waaruit de zon is ontstaan ongeveer 2.3×10^{41} J aan energie hebben verloren om de dichtheid en temperatuur te bereiken waarop kernfusie begint. De dichtheid moet ongeveer 10^5 kg m^{-3} zijn en de temperatuur $\sim 10^7 \text{ K}$. Dat kan alleen als de ster een bepaalde massa heeft. Die massa moet groter zijn dan $\sim 0.1 M_{\odot}$.

Energiebron	Energie (J)
Gravitationele contractie zon	$\sim 2 \times 10^{41}$
Totale nucleaire brandstof zon ($\text{H} \rightarrow \text{He}$)	$\sim 10^{44}$
Huidige lichtuitstraling zon (4.6 Gyr)	$\sim 5 \times 10^{43}$
Jaarlijkse lichtuitstraling zon	$\sim 1.2 \times 10^{34}$

7.3 Appendix 3. Koeling in galaxies vroeger en nu

De koelingstijd is de tijd die het gas nodig heeft om zijn thermische energie kwijt te raken via straling:

$$t_{\text{cool}} = \frac{E_{\text{therm}}}{\dot{E}_{\text{cool}}} = \frac{\frac{3}{2}nkT}{n^2\Lambda(T)}$$

waarbij $\Lambda(T)$ de koelingsefficiëntie is (in W m^3) en n de deeltjesdichtheid.

De omstandigheden in een primordiale wolk

Een typische primordiale wolk die instabiel wordt heeft:

- $T \sim 10^4 \text{ K}$ (het gas valt in vanuit de kosmische structuur, schokverwarmd)
- $n \sim 1 \text{ cm}^{-3} = 10^6 \text{ m}^{-3}$ (karakteristieke dichtheid bij virialevenwicht in een halo van $10^6 M_{\odot}$)
- H_2 -fractie $f_{\text{H}_2} \sim 10^{-3}$

De koelingsefficiëntie

Bij $T \sim 10^4 \text{ K}$ domineert **Lyman- α koeling** van atomair waterstof, maar alleen zolang het gas nog gedeeltelijk geïoniseerd is. De koelingsefficiëntie daalt steil onder 10^4 K — onder die temperatuur schakelt het systeem over op H_2 .

Bij $T \sim 200\text{--}500 \text{ K}$ via H_2 :

$$\Lambda_{\text{H}_2}(T) \sim 10^{-38} \text{ W m}^3$$

wat veel zwakker is dan metaalkoeling ($\Lambda_{\text{metaal}} \sim 10^{-33} \text{ W m}^3$ bij 10^4 K).

De twee fasen

Fase 1: Lyman- α koeling van 10^4 K naar $\sim 8000 \text{ K}$

Bij $T \sim 2 \times 10^4 \text{ K}$ en typische ISM/CGM-dichtheden:

$$t_{\text{cool}} \sim 3 \times 10^{13} \left(\frac{n}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1} \text{ s} \approx 1 \text{ Myr} \cdot \left(\frac{1 \text{ cm}^{-3}}{n} \right)$$

$$t_{\text{cool}} = \frac{\frac{3}{2}nkT}{n^2\Lambda_{\text{Ly}\alpha}} \approx \frac{1.5 \times 10^6 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 10^4}{10^{12} \times 10^{-34}} \sim 10^7 \text{ jaar}$$

Dit gaat relatief snel — vergelijkbaar met de vrije-val tijd van de wolk.

Fase 2: H₂ koeling van ~8000 K naar ~200 K

Dit is de bottleneck. Met $\Lambda_{\text{H}_2} \sim 10^{-38} \text{ W m}^3$ en $f_{\text{H}_2} \sim 10^{-3}$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{cool}} &= f_{\text{H}_2}^2 \cdot n^2 \cdot \Lambda_{\text{H}_2} \approx (10^{-3})^2 \times 10^{12} \times 10^{-38} = 10^{-29} \text{ W m}^{-3} \\ t_{\text{cool}} &= \frac{\frac{3}{2}nkT}{\dot{E}_{\text{cool}}} \approx \frac{1.5 \times 10^6 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 5000}{10^{-29}} \sim 10^{16} \text{ s} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ yr} \end{aligned}$$

Vergelijking met de vrije-valtijd

De vrije-valtijd van de wolk is:

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

Met $\rho = nm_p \approx 1.7 \times 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$:

$$t_{\text{ff}} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{32 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.7 \times 10^{-21}}} \approx 3 \times 10^{14} \text{ s} \approx 10^7 \text{ yr}$$

Dus:

	Fase 1 (Ly-α)	Fase 2 (H₂)
t_{cool}	~10 Myr	~300 Myr
t_{ff}	~10 Myr	~10 Myr
Verhouding $t_{\text{cool}}/t_{\text{ff}}$	~1	~30

Met een minimale temperatuur van ~200 K in plaats van ~10 K, en de lagere dichtheden van primordiale wolken, is de Jeans-massa in primordiale wolken veel groter:

$$M_J \propto T^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \sim 100 M_{\odot}$$

Primordiale wolk (H/He) Moderne moleculaire wolk

T_{min}	~200 K	~10 K
Koeler	H ₂	CO, stof
M_J	~ 10 ² –10 ³ $M_{\odot}$	~ 1 $M_{\odot}$

7.4 Appendix 4: Relativistische energievergelijking (energie en druk)

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$$

Differentieer naar p . Dat levert $\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$. Dit is de groepssnelheid. Reken vervolgens $\frac{dE}{dp}$ uit met $E = \gamma mc^2$ en $p = \gamma mv$. Je vindt dan $v = pc^2/E$. Daarmee geldt dat

$$P = \frac{1}{3} npv = \frac{1}{3} n \frac{p^2 c^2}{E}$$

Straling: $E \approx pc$, stralingsdruk: $P = \frac{1}{3} npc = \frac{1}{3} \rho c^2$.

Materie:

Niet-relativistisch: ($v \ll c$)

$$E = mc^2. \quad (P = nkT = nk \frac{3}{2} mv^2 \propto p^2).$$

$$P = \frac{1}{3} npv = \frac{1}{3} n \frac{p^2 c^2}{E} \propto p^2$$

Relativistisch:

$$E \approx pc, \quad \left(P = \frac{1}{3} npv = \frac{1}{3} n \frac{p^2 c^2}{E} \approx \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \ll \rho_m c^2 \approx 0 \right)$$

$$P = \frac{1}{3} npv = \frac{p^2 c^2}{E} \propto p$$

Het verschil tussen $P \propto p^2$ voor niet-relativistische materie en $P \propto p$ voor relativistische materie is van belang voor de instorting van een witte dwerg tot een neutronenster en van een neutronenster tot een zwart gat.

7.5 Appendix 5. Relatie Druk – (Energie)dichtheid voor ideaal gas

De druk wordt gegeven door de (kinetische) energiedichtheid

$$\varepsilon_{kin} = N E_{kin}/V = n E_{kin} = \frac{f}{2} nkT$$

De kinetische energie bedraagt $\frac{1}{2} nkT$ per vrijheidsgraad. De deeltjes van een mono-atomisch ideaal gas hebben 3 vrijheidsgraden (snelheid in 3 richtingen), dus $f = 3$.

De gaswet is

$$PV = NkT$$

Dus

$$P = \frac{2}{f} \varepsilon_{kin}$$

Het aantal vrijheidsgraden is gerelateerd aan de adiabatische index $\gamma = C_P/C_V$ volgens de wet van Mayer

$$\gamma - 1 = \frac{2}{f}$$

Voor een monoatomisch gas ($f = 3$) vinden we dan $\gamma = 5/3$, en $P = \frac{2}{3} \varepsilon_{kin}$. Fotonen hebben 6 vrijheidsgraden (3 ruimtelijke en 2 voor polarisatie) en dus $\gamma = 4/3$ en $P = \frac{1}{3} \varepsilon_{kin}$.

De relatie tussen de druk en de (energie)dichtheid wordt ook vaak gegeven door een toestandsvergelijking waarin de “adiabatische index” wordt gebruikt. Die (eerste) index wordt gegeven door

$$\gamma = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}$$

Voor een ideaal gas met constante samenstelling geldt dan $\gamma = C_p/C_v$, de verhouding tussen specifieke warmtes bij resp. constante druk en volume. Vaak wordt voor sterren een eenvoudige “polytroop” relatie tussen druk en dichtheid aangenomen van de vorm $P \propto \rho^{1+1/n}$, de Lane-Emden vergelijking, waarin $n = 1/(\gamma - 1) \geq 0$ de polytrope index wordt genoemd. In dat geval geldt dus

$$P \propto \rho^\gamma$$

De geluidssnelheid voor ideale gassen wordt dan gegeven door

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Dit kun je afleiden uit de vergelijkingen voor de versnelling $\rho dv/dt = -dP/dx$ en de eis dat de massa flux constant is: $dpv/dt = 0 \rightarrow \rho dv = -v d\rho$.

7.6 Appendix 5. Veel gebruikte grootheden en constanten.

Natuurconstanten:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$k_B = 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$$

$$m_{proton} = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad \frac{m_{proton}}{m_{elektron}} = 1836$$

Radiation density constant

$$\alpha = \frac{4\sigma}{c} = 7.5 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad \text{energiedichtheid fotonengas: } \alpha T^4.$$

Gegevens Universum:

Gegevens Universum:

$$t_{un} = 13.8 \cdot 10^9 \text{ jaar} = 4.1 \cdot 10^{17} \text{ s}$$

$$\text{Particle horizon voor EdS universe: } R_{un} = 3 c t_{un} \sim 4 \cdot 10^{26} \text{ m } (\sim 14 \text{ Gpc}).$$

De huidige Event Horizon is ($\sim 5 \text{ Gpc}$).

Binnen de Event Horizon geldt:

$$V_{un} \sim 4 \cdot 10^{80} \text{ m}^3$$

$M_{un} \sim 1.5 \cdot 10^{53} \text{ kg} \sim 10^{80}$ protonen

Total number of galaxies: $\sim 10^{11}$

Roodverschuiving	Look-back time (miljard jaar)	Tijdperken
0.1	~ 1.35	Nabije sterrenstelsels
0.5	~ 5.21	Universum was $\sim 60\%$ van huidige leeftijd
1.0	~ 7.96	"Cosmic Noon" (piek stervorming)
2.0	~ 10.53	Vroege vorming van grote stelsels
5.0	~ 12.63	Reionisatie tijdperk
1100	~ 13.80	Kosmische achtergrondstraling (CMB)

Stars en Galaxies: $z = 0.2$

$$M_{sun} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad R_{sun} = 7 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad V_{sun} = 1.4 \cdot 10^{27} \text{ m}^3$$

$$R_{gal} \sim 10 \text{ kpc} = 3.1 \cdot 10^{20} \text{ m}, \text{ Donkere materie reikt tot } \sim 10 R_{gal}$$

$$M_{gal} \sim 10^{11} M_{sun} \sim 10^{42} \text{ kg} \text{ (baryonen)}. \text{ Massa in Donkere materie } \sim 10 M_{gal}$$

$$\sigma_{gal} \sim 200 \text{ km s}^{-1} = 2 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

$$\sigma_{gal} \sim 200 \text{ km s}^{-1} \left(\frac{M_{gal}}{10^{42} \text{ kg}} \right)^{1/2} \left(\frac{R_{gal}}{3 \cdot 10^{21} \text{ m}} \right)^{-1/2} = 200 \left(2 \frac{M_{gal}}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{R_{gal}}{100 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

$$1 \text{ parsec (pc) is } 3.6 \text{ lichtjaar} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m} \quad 1 \text{ AU} = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$1 \text{ Mpc} = 3.1 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

Samenstelling: baryonen: 5% Donkere materie: 27%, Donkere Energie: 68%.

$$\text{CMB: } T = 2.72548 \text{ K}$$

$$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad 1 \text{ Mpc} = 3.1 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

$$\rho_{crit} = 0.85 \cdot 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} \quad T = 2.7 \text{ K}$$

$$10 \text{ eV} \approx 44 \text{ km s}^{-1} = 116 \text{ K} \quad \sim 10^{14}$$

$$\frac{\rho_{crit}}{m_p} \sim \frac{10^{-26} \text{ kg m}^{-3}}{m_p} = 10^{-26} \cdot 10^{27} \cdot 0.66 = 6.6 \text{ m}^{-3} = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-3}$$

$$\Omega_{bar} \approx 0.05$$

$$n_{bar,crit} \sim 0.05 \frac{\rho_{crit}}{m_p} = 5 \cdot 10^{-28} \text{ kg m}^{-3} / m_p \sim 0.3 \text{ m}^{-3}$$