

Quantummechanica, een nieuwe realiteit?

Concept syllabus bij de Daedalus workshop van 4-11-2025 door Nico Roos

Inhoud

Quantummechanica, een nieuwe realiteit?	1
Inleiding: Hoe deze syllabus te gebruiken.	4
Als nadere uitleg van de stof die behandeld is in de workshop	4
Als begincursus quantummechanica	4
1. Deeltjes of golven.....	5
1.1 Newton versus Huygens.....	5
1.2 Young's twee spleten experiment voor licht → interferentie.....	5
2. Historie: Interpretatie en wiskundige beschrijving	7
2.1 Fermat's principe.....	7
2.2 Hamiltons's principe (principle of stationary action).....	8
2.3 Begin van de quantummechanica – enkele jaartallen	10
2.4 UV catastrofie en Planck's formule	11
2.5 Wat zijn de quantummechanische golven?.....	18
3. Het EPR artikel (1935).....	19
3.1 Wat is een verstrengelde toestand (zie ook 7.1)	20
3.2 Spooky action at a distance	21
4. De wereld bestaat uit quantum bits	22
4.1 Spin statistiek	22
4.2 Vergelijking met polarisatie experiment.....	24
5. Quantummechanische beschrijving van fysische toestanden.....	25
5.1 Dirac's notatie; het inproduct en uitproduct van toestandsvectoren.....	25
5.2 Oneindig –dimensionale toestandsvectoren.....	27
5.3 Operatoren en Eigenwaarden	29
5.4 Operatoren in matrixvorm (S. 3)	30
5.5 Commuterende variabelen.....	31
5.6 De Golf functie (Susskind 5.1 t/m 5.3, en 8.1).....	32
5.7 Waarschijnlijkheid van de uitkomst van een meting (Susskind, p 106/7).....	33
5.8 De gemiddelde waarde (expectation value) van een observabele	33
5.9 De Schrodinger vergelijking	34
5.10 De Born regel voor de waarschijnlijkheid.....	36

5.11 Positie en impuls operatoren	36
Positie operator.....	37
Impuls operator	37
Spin operator (zie hfdst 6).....	38
5.12 Onzekerheidsrelatie	38
5.13 Spin toestandsvectoren.	39
5.14 Beschrijving van spin in de QM.....	40
6. De Spin operatoren.....	42
7. Entanglement.....	45
7.1 Alice en Bob (A en B)	45
7.2 In Product toestanden is er geen correlatie tussen de spins.....	47
7.3 Polarisatie principe	48
7.4 Verstrengeling.....	48
8. Entanglement (en Quantum computing)	50
Enkele termen.....	50
8.1 Feynmann's voorbeeld (Bell ongelijkheid):	51
8.2 Bell ongelijkheden voor spin-1/2 deeltjes	54
8.3 Pure (zowel product als verstrengelde) toestanden en gemengde toestanden.....	56
8.3.1 De projectie operator (Susskind 9. 193 e.v. zie ook 5 van deze syllabus)	56
8.3.2 De dichtheidsmatrix (of dichtheidsoperator) (S 7.3).....	58
8.3.3 Dichtheidsmatrix voor 2 deeltjes systemen.....	59
8.3.3 Entropie en de dichtheidsmatrix.....	61
8.3.4 Waarom er geen sprake is van instantane werking op afstand is bij meting aan verstrengelde deeltjes (S 7.9)	63
9. Beroemde experimenten met fotonen.....	65
9.1 De Beam splitter.....	65
9.2 Delayed choice experimenten	68
9.3 Meting zonder interactie.....	69
10. Appendix	70
10.1 Zijn imaginaire getallen echt nodig in de QM	70
Beschrijving lopende golf, interferentie	72
10.2 Schrodinger's kat.....	73
10.3 Toepassingen quantumcomputer	74
10.4 Tensor product of Kronecker product (Susskind 7.1).	74
Literatuur:.....	75

Links:.....	75
-------------	----

Inleiding: Hoe deze syllabus te gebruiken.

Als nadere uitleg van de stof die behandeld is in de workshop

Deze “syllabus” is bedoeld om verdieping en verdere uitleg te geven bij de Daedalus workshop die ik op 4 november 2025 gegeven heb. Het is raadzaam om je in eerste instantie te beperken tot de onderwerpen die in de workshop aan de orde zijn gekomen.

De eerste 2 hoofdstukken kun je zien als extra aanvullingen op de workshop. De onderwerpen in deze hoofdstukken zijn slechts terloops (of helemaal niet) aan de orde gekomen.

In de workshop kwam allereerst het karakter van de quantum mechanische golf aan de orde. Zo’n golf is geen gebruikelijke golf zoals een water golf of een oscillerend elektromagnetisch veld. Je kunt het beschouwen als een wiskundige golf waarvan de amplitude samenhangt met de waarschijnlijkheid van een fysische grootheid. Golven kunnen wiskundig heel goed beschreven worden met behulp van complexe getallen die een reëel en een imaginair deel hebben (zie hoofdstuk 10). De amplitude van een golf kan zowel positief als negatief zijn. Zo ontstaat interferentie als je de amplitudes van twee golven die elkaar ontmoeten bij elkaar optelt. Een negatieve amplitude past natuurlijk niet bij het begrip waarschijnlijkheid. De waarschijnlijkheid van een fysische grootheid komt dan ook niet overeen met de amplitude, maar met het kwadraat van de amplitude. Bij complexe getallen wordt dat kwadraat berekend door het complexe getal te vermenigvuldigen met zijn complex toegevoegde (zie hoofdstuk 10).

Het eerste deel van de workshop gaat over het verschijnsel superpositie van quantummechanische golven. De experimenten die we besproken hebben staan in Hoofdstuk 9.

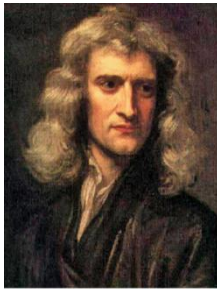
Na de pauze gingen we verder met het verschijnsel “verstrengeling”. In hoofdstuk 7 en 8 vindt je daar meer informatie over. De vergelijkingen die daarin voorkomen worden afgeleid in de hoofdstukken 4,5 en 6.

Als begincursus quantummechanica

Bij het maken van deze syllabus heb ik gebruik gemaakt van de boeken die in de literatuurlijst [Literatuur](#): vermeld staat. Veel stukken van deze tekst – vooral hoofdstukken 4 t/m 9 - leunen zo zwaar op Susskind’s boek (hfdst 1 t/m 8) dat bij een eventueel te geven cursus als uitgangspunt gebruikt zal worden. De laatste 2 hoofdstukken van Susskind’s boek geven een mooie aanvulling die gemakkelijk te volgen is als men de eerste hoofdstukken goed heeft bestudeerd. Het boek van Sakurai is een meer compacte en meer uitgebreide inleiding in de quantummechanica. Hoofdstuk 9 van de Syllabus is een samenvatting van enkele experimenten met fotonen zoals die besproken worden in “The quantum Divide”, van C.C. Gerry and K.M. Bruno.

1. Deeltjes of golven

1.1 Newton versus Huygens



Isaac Newton
1643-1727

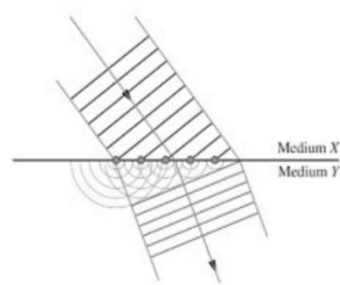
Golven en/of deeltjes

Licht



Newton

VS



Huygens



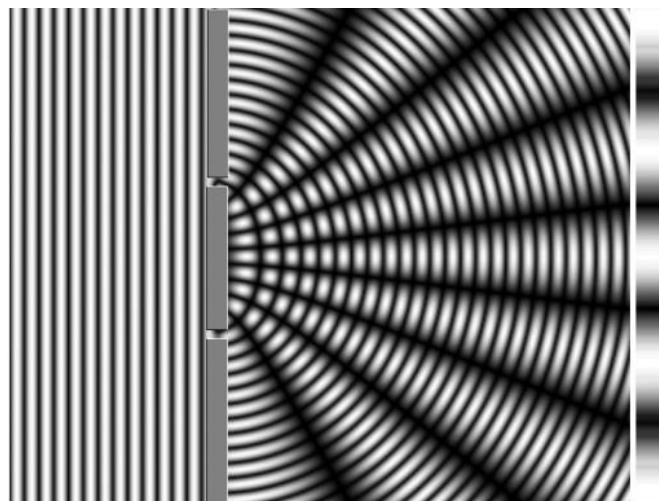
Christiaan Huygens
1629-1695

1.2 Young's twee spleten experiment voor licht ➔ interferentie

Interferentie

[Quantumfysica \(3\): Golven of deeltjes? | the Quantum Universe](#)

Licht gedraagt zich als golven..... De vlakke golven komen vanaf links aan bij de twee spleten en vormen daarachter een interferentiepatroon.

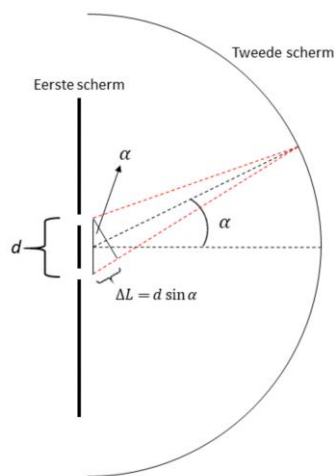


Huygens zou zeggen: “licht is een golfverschijnsel. Golven kun je bij elkaar optellen”. Dat noem je **superpositie** van golven. Het verklaart **interferentie**

Superpositie: je kunt golven (amplitudes) bij elkaar optellen. Het weglengte verschil tussen de twee golven die op een bepaalde plaats op het tweede scherm bij elkaar komen leidt tot een faseverschil dat leidt tot versterking of verzwakking van de golven. Dat noemen we **Interferentie**. De intensiteit van de (gecombineerde) golf is evenredig met A^2 .

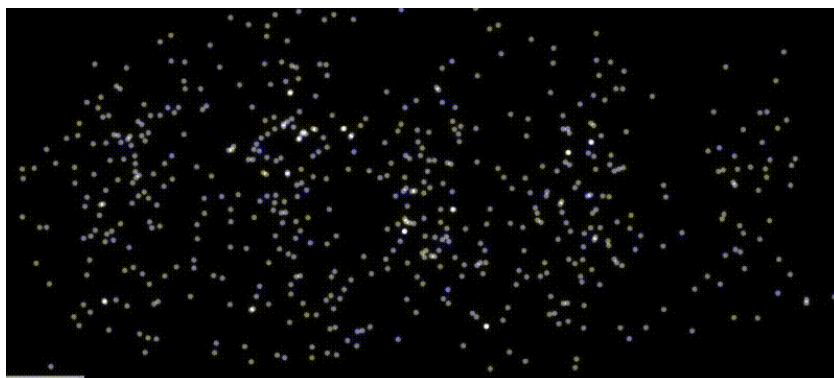
Optellen van 2 golven : λ = golflengte, k = golfgetal = $2\pi/\lambda$, ω = hoeksnelheid = $\frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, T = omlooptijd, ν = frequentie. Fase van de golf = $k_1x + \omega_1t$

$$A = A_1 + A_2 = \sin(k_1x + \omega_1t) + \sin(k_2x + \omega_2t)$$



Het weglengte verschil, ΔL in het plaatje hierboven, leidt tot een faseverschil tussen de 2 golven. Wanneer $\omega_1 = \omega_2$ en $k_1 = k_2$ is het faseverschil tussen de golven die bij het tweede scherm aankomen gelijk aan $\Delta L = d \sin \alpha$. Daarmee ontstaat dan het sinusvormige interferentiepatroon.

Maar lichtgolven lijken zich ook als deeltjes te gedragen, en deeltjes als golven.



https://en.wikipedia.org/wiki/Matter_wave. 1927 experiment met elektronen.

Laat fotonen (of elektronen) één voor één door de spleten gaan. Er ontstaat opnieuw een interferentiebeeld. Het lijkt alsof een individueel deeltje zich in een superpositie toestand bevindt waarin het door beide spleten gaat. In die superpositie toestand is zijn de positie en de

impuls van het deeltje onbepaald. Pas als het gedetecteerd wordt kennen we zijn positie en verdwijnt het golfkarakter. Er zijn hier twee fundamentele basisprincipes aan de orde: lokaliteit en realiteit.

Realiteit, omdat de vraag gesteld kan worden: heeft het deeltje, voordat het gedetecteerd wordt, wel een bepaalde plaats en impuls.

Lokaliteit, omdat het plotseling instorten van de golf in positie B als gevolg van een meting in positie A de vraag opwerpt of dat niet in strijd is met Einstein's principe dat informatie zich niet sneller kan voortplanten dan het licht. We komen hier nog op terug (zie [hfdst 3](#)). Er is nog een andere definitie van lokaliteit, of liever niet-lokaliteit: het bestaan van een niet klassieke correlatie tussen de metingen van A en B die elk een deeltje van een tweetal verstrengelde deeltjes (of fotonen) opvangen. Deze correlatie blijkt niet in strijd te zijn met Einstein's verbod op snelheden groter dan de lichtsnelheid. De correlatie is niet het gevolg van informatie uitwisseling tussen A en B. Is er dan sprake van verborgen variabelen die voor elk verstrengeld deeltjespaar bepalen welke spin (of polarisatie) de deeltjes hebben die bij A en B aankomen? Bell heeft daarvoor een test bedacht: de Bell ongelijkheden (Hfdst 8). Als er sprake zou zijn van verborgen variabelen zou je zo'n ongelijkheid met een experiment kunnen testen. Die tests zijn inmiddels gedaan met als resultaat dat niet aan die ongelijkheden wordt voldaan. Daarmee is het idee van (klassieke) verborgen variabelen op z'n minst erg onwaarschijnlijk geworden.

2. Historie: Interpretatie en wiskundige beschrijving

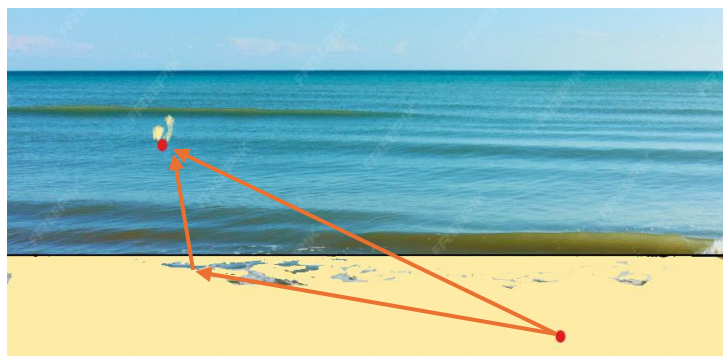
Newton-Huygens

2.1 Fermat's principe

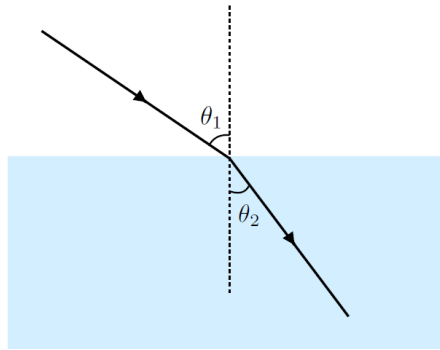
[Fermat's principle - Wikipedia](#)

Licht volgt de kortste tijd in plaats van de kortste weg. Verklaart ook de verschijnselen – zoals breking - die Huygens kon verklaren met zijn golftheorie.

De kortste weg in tijd is niet altijd de kortste weg in afstand. Welke weg zou je kiezen als je de drenkeling wilde redden?



breking

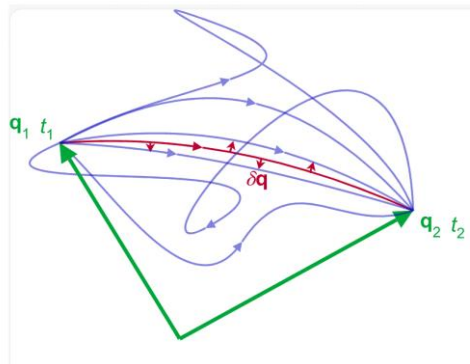


2.2 Hamilton's principle ([principle of stationary action](#))

Tegenwoordig hebben we het niet meer over het principe van Fermat, of het principe van de kortste weg, maar over **Hamilton's Principle van de minste actie (Least or stationary Action)**. Je gebruikt daarvoor de Lagrangiaan. De **Lagrangiaan** vormt de basisgrootheid van de moderne fysica.

De Actie S van een vrij deeltje is gedefinieerd als een integraal over de Lagrangiaan L langs een pad $q(t)$ van $q_1(t_1)$ naar $q_2(t_2)$: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$.

Hamilton's Principle zegt dan dat het deeltje het pad volgt waarvoor de verandering van S : $\delta S = 0$.

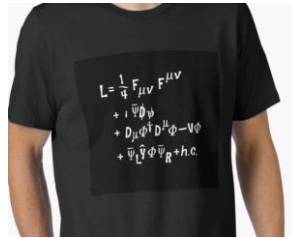


Figuur 1. https://nl.wikipedia.org/wiki/Principe_van_de_kleinste_werking

Dit principe levert dan de Euler-Lagrange vergelijkingen op. Deze vergelijkingen worden tegenwoordig gebruikt om de dynamica van deeltjes te beschrijven waarbij de definitie van de Lagrangiaan de fysica bevat.

Het principe van Fermat kun je afleiden door $L(q(t), \dot{q}(t), t) = 1$ te nemen (zie [Wetenschapsschool: natuurkunde voor de middelbare school](#)).

Om de kortste weg te vinden in een Euclidisch vlak (x-y) neem je $L(q(t), \dot{q}(t), t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ([Visie HEF](#)). Om de bewegingsvergelijking voor deeltjes met massa te vinden vinden moeten we de Lagrangiaan gelijk stellen aan het verschil tussen kinetische en potentiële energie: $L = E_{kin} - E_{pot}$. We vinden dan de wet van Newton: $F = ma$ met $F = -\nabla E_{pot}$. Tegenwoordig worden alle bekende natuurkrachten ondergebracht in één Lagrangiaan die op het T-shirt hieronder in een verkorte vorm is weergegeven.

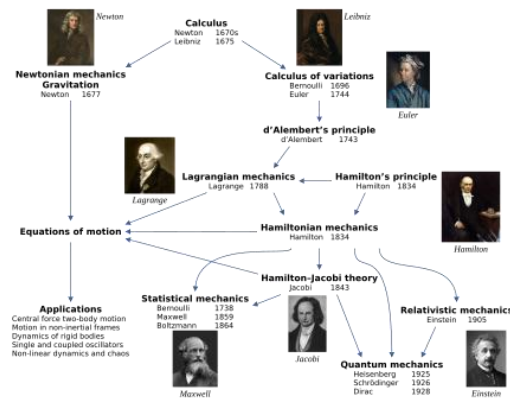


N.B.

- De kleinste hoeveelheid Action wordt gegeven door $\hbar$.
- Action en entropie zijn nauw met elkaar verwant.

Het deeltje “kiest” dus uit vele paden het pad waarvoor de actie minimaal varieert ($\delta S = 0$). Moet het daarvoor alle paden eerste uitproberen? Nee, het “Least action principle” leidt tot de Euler-Lagrange vergelijkingen die de lokale beweging van het deeltje voorschrijven. Populair gezegd heeft het deeltje op ieder moment geen andere keus dan lokaal in de juiste richting te bewegen.

[History of variational principles in physics - Wikipedia](#)

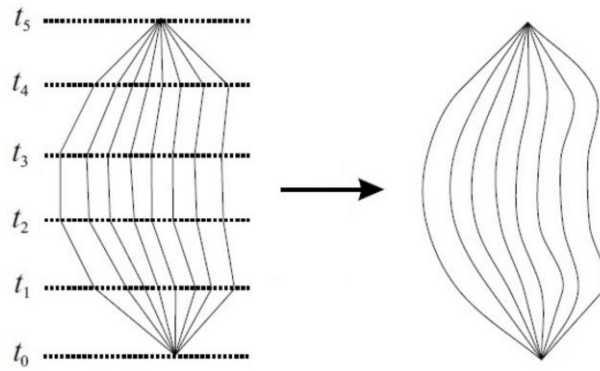


Dit principe (Least Action or Stationary Action Principle) vormt de basis van de moderne natuurkunde samen met:

- De ontdekking dat symmetrieën behouden grootheden opleveren (E. Noether) en
- Het relativiteitsprincipe dat behouden grootheden onafhankelijk van het coördinatensysteem van de waarnemer moeten zijn (A. Einstein).
- De relativiteitstheorie houdt in dat de lichtsnelheid voor iedere waarnemer de maximale snelheid is waarmee deeltjes zich kunnen verplaatsen, en dat informatie overdracht van (r, t) naar (r', t') dus niet met snelheden groter dan de lichtsnelheid plaats kan vinden.
- De quantum (velden) theorie

Feynmann:

Uitbreiding van Young's 2 spleten experiment → waarom geen 10 spleten?



Figuur 2. https://www.wetenschapsschool.nl/new_chapters/physics_ch12.html

Alle amplitudes moeten opgeteld. De fase verschillen zorgen ervoor dat het deeltje uiteindelijk de kortste weg neemt:

Young → Feynmann → **padintegraal** → Schrödinger vergelijking. .

https://www.wetenschapsschool.nl/new_chapters/physics_ch12.html

2.3 Begin van de quantummechanica – enkele jaartallen

1900 Planck's formule. **Licht wordt in kwanta uitgezonden.**

1905 Einstein: Foto-elektrisch effect

1913 Bohr: atoom model

1917 Einstein: ontdekking gestimuleerde emissie (basis van de Laser) op basis van Planck's formule

1922 Stern-Gerlach experiment.

1924 De Broglie: matter waves $h\nu_0 = mc^2$ (ν_0 is the Compton frequency). $E = \gamma mc^2 = h\nu$.
 $v = v_g = d\omega/dk$. $p = \gamma mv = h/\lambda$.

1924-1925: De Bose-Einstein statistiek (voor o.a. fotonen) kan gebruikt worden om Planck's vergelijking af te leiden. Dat is een fundamenteel punt in de ontwikkeling van de quantumfysica

1925 Pauli uitsluitingsprincipe; Goudsmit en Uhlenbeck: electronspin: “**Een niet klassiek beschrijfbaar**” eigenschap.

1926 Schrödinger vergelijking

1926 Fermi-Dirac statistiek

1927 Matter waves experimenteel bevestigd (o.a. Thomson en Reid in electron diffractie experiment) [Matter wave - Wikipedia](#)

1935 Einstein, Podolsky en Rosen (EPR) artikel

1964 John Bell's ongelijkheden om de “hidden variables” theorie te testen

1981 Alain Aspect, Philippe Grangier en Gerard Roger doen het eerste experiment om Bell te testen

Natuurkundigen en de QM: <https://www.scientificamerican.com/article/physicists-divided-on-what-quantum-mechanics-says-about-reality/>

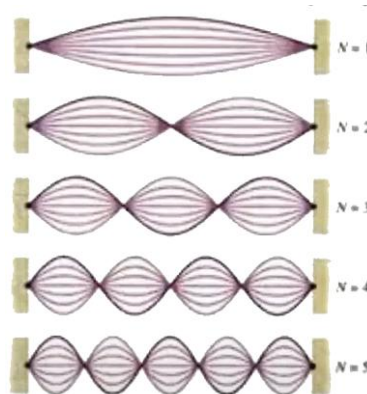
2.4 UV catastrophie en Planck's formule

2.4.1 Rayleigh Jeans Law & The Ultraviolet Catastrophe

We beschouwen een vierkante doos met zijde gelijk aan a . De doos heeft een temperatuur T . Het elektrisch veld op de wanden van de doos is gelijk aan 0, omdat herverdeling van de ladingen in de wanden er voor zorgt dat het elektrisch veld opgeheven wordt. De wanden bevatten wel (harmonische) oscillatoren in de vorm van trillende atomen (temperatuurbeweging). De atomen hebben een kleine restlading waardoor de trillingen EM golven in de doos uitzenden. Deze EM golven hebben amplitude gelijk aan 0 op de wanden. Het zijn dus staande golven die van wand tot wand lopen. Voor de afstand tussen de wanden geldt dan $a = N \frac{\lambda}{2}$ waarin n een geheel getal is en λ de golflengte van de golf (zie de figuur hieronder)

We willen nu de energiedichtheid van de EM golven in de doos berekenen. De gemiddelde energie van een golf wordt gegeven bepaald door het principe van equipartitie van energie. De gemiddelde energie van de (harmonische) oscillatoren is gelijk aan $2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$ (2 vrijheidsgraden, 1 voor kinetische en 1 voor potentiële energie). We hebben daarvoor het aantal golven met een bepaalde frequentie nodig. De golflengte is gelijk aan de lichtsnelheid gedeeld door de frequentie: $\lambda = c/\nu$. Het aantal golven, in bijv. de x-richting, kunnen we met bovenstaande formules berekenen: $N = 2a/\lambda = 2a\nu/c$,

$$N(\nu) = \frac{4a\nu}{c}$$



Het aantal golven per frequentie interval wordt gegeven door :

$$dN(\nu) = \frac{4a}{c} d\nu$$

Vervolgens tellen we de golven in de 3 verschillende richtingen in de n -ruimte op. Het volume in die ruimte wordt gegeven door $dV = N(\nu)d\nu = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn =$

$$N(\nu)d\nu = \frac{4\pi}{8} d(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{4a}{c} d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c} \nu^2 \right)^2 \frac{2a}{c} d\nu = 4\pi a^3 \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

We moeten dit aantal nog met 2 vermenigvuldigen, omdat de golven 2 polarisatierichtingen kunnen hebben. Dus

$$N(\nu)d\nu = 8\pi a^3 \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

Vervolgens willen we de energiedichtheid berekenen. Daarvoor hebben we een gemiddelde waarde van de energie per foton nodig. Die wordt gegeven door (equipartitie)

$$\langle E_{\text{per d.o.f.}} \rangle = \frac{1}{2} kT$$

waarin k de Boltzmann constante is en $\langle E_{\text{per d.o.f.}} \rangle$ de gemiddelde energie per vrijheidsgraad (degree of freedom). Een harmonische oscillator heeft 2 vrijheidsgraden (d.o.f.'s), dus de gemiddelde energie per foton is

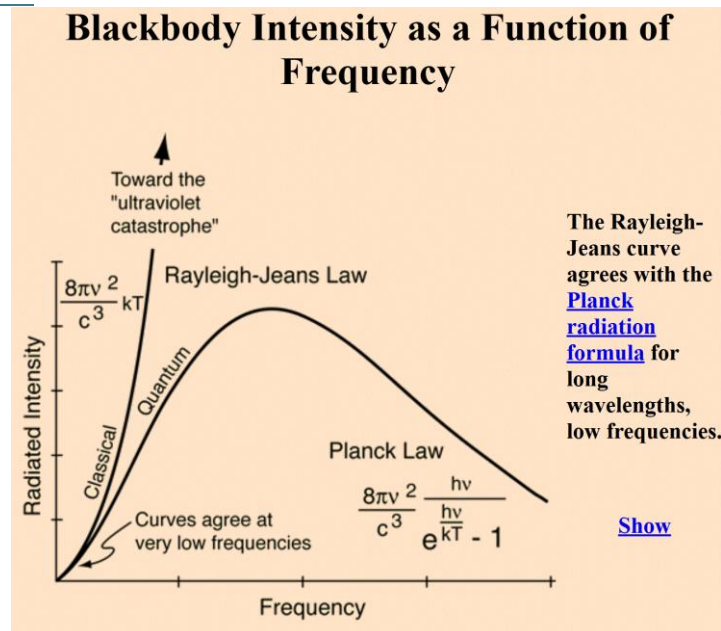
$$\langle E \rangle = kT$$

De energie dichtheid wordt dan

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{\langle E \rangle N(\nu)}{a^3} d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Dit is de Rayleigh-Jeans formule voor het spectrum van de straling in de doos. Je ziet dat de energiedichtheid kwadratische toeneemt met de frequentie. Dit is in strijd met de waarnemingen die laten zien dat de energie dichtheid exponentieel afneemt bij grotere frequenties. Dat is de UV catastrofe.

Blackbody Radiation



De oplossing van dit probleem door Planck is het einde van de discussie tussen Newton en Huygens over de vraag of licht uit deeltjes of uit golven bestaat en het begin van de quantummechanica.

2.4.2 Planck's oplossing (1900, introductie van het begrip quantum)

Na lang puzzelen kwam Planck tot de veronderstelling dat licht bestond uit pakketjes van discrete energie niveaus volgens de regel $E_n = nh\nu = n\hbar\omega$. De oscillatoren in de wanden van

de doos zouden dus alleen deze energieniveaus bezetten en bij overgangen van het ene energie niveau naar het andere fotonen uitzenden met energieën met een heel aantal malen $h\nu$. De waarschijnlijkheid dat een oscillator een foton met energie E_n uitzendt wordt dan bepaald door de temperatuur volgens de Boltzmann verdeling:

$$P_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}}$$

waarin n loopt van 0 tot ∞ . De noemer zorgt er voor dat $\sum_n P_n = 1$.

We kunnen nu opnieuw een berekening doen van het spectrum van de straling in de doos. We berekenen eerst de gemiddelde waarde van de energie $\langle E \rangle$. Deze is per definitie gelijk aan

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n P_n$$

Definieer nu: $x = e^{-h\nu/kT}$. De gemiddelde energie kan dan geschreven worden als

$$\langle E \rangle = h\nu \frac{\sum_n n x^n}{\sum_n x^n} = h\nu \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}$$

De teller is gelijk aan $1/(1 - x^2)$ en de noemer $1/(1 - x)$. Het resultaat is

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Hierboven hebben we gevonden dat het aantal staande golven per frequentie interval per volume eenheid gelijk is aan

$$N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

Het Planck spectrum wordt dan

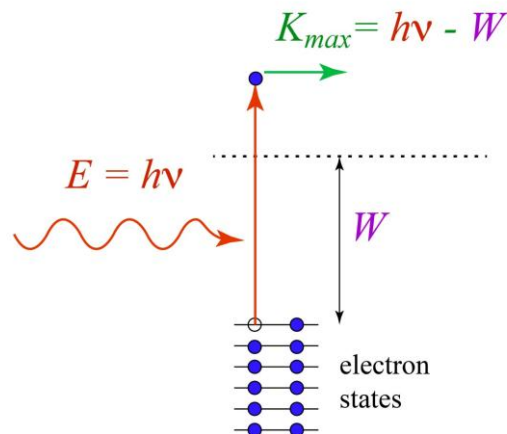
$$\langle E \rangle N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Dit spectrum komt goed overeen met de waarnemingen. Planck veronderstelde nog dat de interactie tussen de oscillatoren en het EM veld er toe leidde dat de golf energie gekwantiseerd was.

2.4.3 Einstein's verklaring van het foto-elektrisch effect (1905).

Einstein kwam in 1905 tot de conclusie dat het licht zelf in quanta (fotonen) met energie $h\nu$ voorkwam. Hij verklaarde hiermee het foto-elektrisch effect: Als je licht met een bepaalde frequentie op een metaal laat vallen zullen er elektronen vrijkomen als die frequentie boven een bepaalde drempel licht. Einstein verbond de frequentie met de grens energie via Planck's formule: $E = h\nu$.

The Photoelectric Effect



[Who Invented the Quantum? Einstein vs. Planck | Galileo Unbound](#)

In 1913 baseerde N. Bohr zijn atoom model op Planck's kwantisatie idee.

2.4.5 Einstein's ontdekking van de gestimuleerde emissie (1917).

Einstein bouwde voort op Planck's formule voor de straling in een holte binnen in een warme black box. De straling is in evenwicht met de aangeslagen atomen die de straling absorberen en weer uitzenden. Hij vroeg zich af hoe dit evenwicht in overeenstemming was met Planck's formule en redeneerde als volgt: Stel dat de uitzending van een foton plaatsvindt wanneer een atoom vanuit een aangeslagen toestand 2 overgaat naar toestand 1. Het verschil in energie tussen de toestand 2 en toestand 1 is $h\nu$. De kans dat dat het atoom spontaan (per tijdseenheid) overgaat van toestand 2 naar 1 noemen we A_{21} . De kans dat het atoom in toestand 1 een foton opvangt en daardoor overgaat van toestand 1 naar 2 is evenredig met de $\rho(\nu)$, de dichtheid van fotonen met frequentie ν . De evenredigheidsfactor noemde hij B_{12} . Einstein ontdekte dat hij Planck's formule in de vorm

$$\rho(\nu) = a \frac{1}{be^{h\nu/kT} - 1}$$

waarin a en b constanten zijn, kon afleiden als hij veronderstelde dat de overgang van 2 naar 1 gestimuleerd kon worden door de aanwezigheid van fotonen met energie $h\nu$. Hij voerde daarom nog een evenredigheidsconstante B_{21} in. Het aantal fotonen dat per tijdseenheid door gestimuleerde emissie wordt uitgezonden is dus gelijk aan $B_{21}\rho(\nu)$. We kunnen nu een vergelijking voor thermisch evenwicht opstellen. We veronderstellen dat er N_1 atomen in toestand 1 zijn en N_2 atomen in toestand 2. Er is sprake van evenwicht als het aantal atomen dat overgaat van 1 naar 2 even groot is als het aantal dat overgaat van 2 naar 1. De formule daarvoor is

$$N_1 B_{12} \rho(\nu) = N_2 A_{21} + N_2 B_{21} \rho(\nu)$$

Als we dit combineren met de Boltzman formule voor de verhouding van het aantal atomen in toestand 2 en 1:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-h\nu/kT}$$

Dan vinden we

$$\varrho(\nu) = A_{21} \frac{1}{B_{12}e^{h\nu/kT} - B_{21}}$$

Deze formule komt exact overeen met Planck's formule als

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

en

$$B_{12} = B_{21}$$

Einstein toonde hiermee aan dat gestimuleerde emissie een verschijnsel dat moet bestaan om Planck's wet af te kunnen leiden. 40 jaar later werd de eerste laser gerealiseerd.

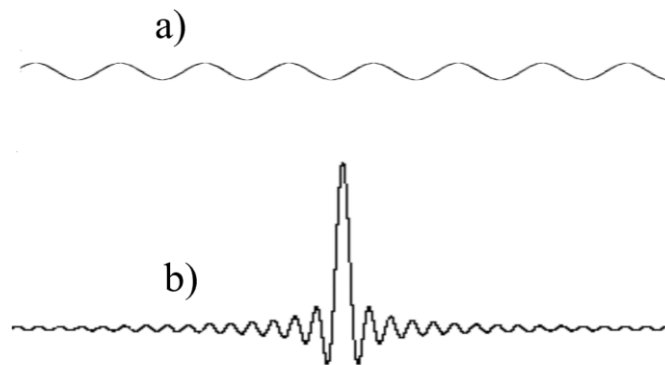
2.4.6 De Broglie's matter waves

De Broglie breidde Planck's en Einstein's idee dat fotonen zich als deeltjes met energie $E = h\nu$ kunnen gedragen uit naar deeltjes. Hij bedacht dat deeltjes met een massa zich als materiegolven konden gedragen. Deeltjes met massa m en snelheid v zouden een golflengte $\lambda = h/p = h/mv$ hebben. We noemen deze golflengte dan ook de De Broglie golflengte. Wat voor golven zijn dat? Het zijn golfpakketjes die zich voortplanten met de groepssnelheid ($v = v_g = \omega/k$). Golfpakketjes zijn superposities van golven met dezelfde amplitude en frequenties die een klein beetje van elkaar verschillen (zie [Quantum Wave Packet](#)). Golfpakketjes hebben dus zowel golf als deeltjes eigenschappen. De golven verplaatsen zich met de phase snelheid ($v_{ph} = d\omega/dk$). Voor relativistische deeltjes geldt $v_g v_{ph} = c^2$ (hieronder wordt dat uitgewerkt). De fase snelheid gaat naar ∞ voor $v_g \rightarrow 0$.

De quantummechanische golf is principe overal (basis voor QFT). Die niet-lokaliteit lijkt in strijd met De SRT die stelt dat niets sneller kan gaan dan het licht, maar is er niet mee in strijd. QM gebruikt een (complexe) golffunctie die zich tot in het ∞ uitstrekt en ook instantaan kan veranderen (instorten) bij een meting op grote afstand (verstrengeling). (Vergelijk dit met de snelheid waarmee het lichtpuntje van een laser zich verplaatst langs een verre muur wanneer je de richting van de laserstraal verandert?).

Onzekerheidsrelatie hangt direct samen met het golfkarakter van deeltjes:
De volgende 2 extreme gevallen laten dat zien:

- a) Deeltje met scherp bepaalde snelheid/impuls: $p = \hbar k = mv$. Positie is onbepaald
- b) Deeltje met scherp bepaalde positie. Snelheid niet goed bepaald.
 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ (zie 5.11 [Onzekerheidsrelatie](#))



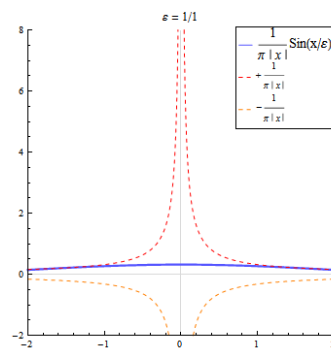
[Dirac delta function - Wikipedia](#) (zie ook 5.2)

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x-a)} dp$$

of

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon} \varphi(x) dx$$

[Diracdelta - Wikipedia](#)



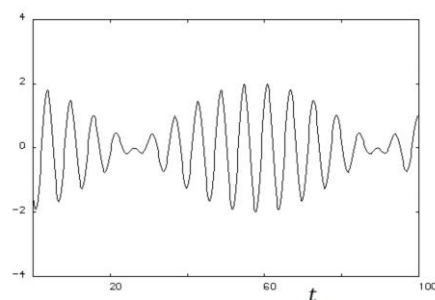
[Matter wave - Wikipedia](#)

[Group velocity - Wikipedia](#)

Golfpakketjes kun je maken door golven met elkaar te combineren, bijv.

$$x = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1.1 \quad \varphi_1 = 2, \quad \varphi_2 = 2.5$$

$$\cos(f_1 t + \varphi_1 x) + \cos(f_2 t + \varphi_2 x)$$



$$\cos(f_1 t + \varphi_1 x) + \cos(f_2 t + \varphi_2 x) = 2 \cos\left[\frac{f_2 - f_1}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} x\right] \cos\left[\frac{f_2 + f_1}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} x\right]$$

De som van de cosinussen is dus gelijk aan het product van een lopende golf met gemiddelde frequentie $(f_2 + f_1)/2$ en golfpakketjes met (beat)frequentie $(f_2 - f_1)/2$. De eerste cosinus geeft heeft de fasesnelheid

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{f_2 + f_1}{\varphi_2 + \varphi_1}$$

De golfpakketjes lopen er over heen met snelheid

$$v_{group} = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{f_2 - f_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

Phase snelheid: $v_{fase} = \omega/k$, groepssnelheid is $v_g = d\omega/dk$. We zullen nu laten zien dat de groepssnelheid overeen komt met de snelheid van het deeltje in de interpretatie van de Broglie.

$$v_g v_{fase} = c^2$$

Einstein (1905): fotonen $E = \hbar\omega$ of $E = h\nu$ $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 c^2$

De Broglie (1924 [Matter wave - Wikipedia](#)): $p = \hbar k = mv = \gamma m_0 v$ $(\omega(k) = \frac{m_0 c^2}{\hbar} + \frac{\hbar k^2}{2m_0})$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dk}$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left(-2 \frac{v}{c^2}\right) = \frac{m_0}{\hbar} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

$$\frac{dv}{dk} = \frac{d}{dv} \frac{mv}{\hbar} = \frac{d}{dv} \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{m_0 v}{\hbar} \right) = \frac{m_0 v}{\hbar} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

Deze twee vergelijkingen combineren levert

$$v_g = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dk} = v$$

En aangezien $\frac{E}{p} = \frac{\omega}{k} = v_{fase} = \frac{c^2}{v}$ vinden we $v_g v_{fase} = c^2$

Andere afleiding:

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}},$$

$$v_{fase} = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{m_0^2 c^4}{k^2 \hbar^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 c^2 + \frac{p^2 m_0^2 c^4}{k^2 \hbar^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \frac{E}{p}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \right) = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} = \frac{pc^2}{E}$$

$$v_{fase} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

Samen leveren deze formules

$$v_g = \frac{pc^2}{E} = \frac{c^2}{v_{fase}} = v$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Gaat naar ∞ voor $v \Rightarrow 0$. $|v_{fase}| > c$, maar niet in strijd met de SRT.

Free particles: plane waves: $\psi(r, t) = e^{i(k \cdot r - \omega t)}$

Single particle wave: $\psi(r, t) = u(r, k) e^{i(k \cdot r - \omega t)} \rightarrow \psi(r, t) = \int u(r, k) e^{i(k \cdot r - \omega t)} dk$

De materiegolven van De Broglie werden in de QM uitgewerkt tot (complexe) toestandsvectoren (golffuncties) met een amplitude die de probability amplitude genoemd wordt. De golven kunnen interferentie (door superpositie) verklaren en bij een meting levert het kwadraat van de probability amplitude de waarschijnlijkheid dat een deeltje een bepaalde eigenschap (plaats, snelheid, spin) heeft. Plaats en snelheid kunnen afzonderlijk met grote nauwkeurigheid bepaald worden, maar niet tegelijk (onzekerheidsrelatie). De golffunctie kan bij een lokale meting instantaan veranderen op grote afstand (Vergelijk dat met de bundel van een vuurtoren).

2.5 Wat zijn de quantummechanische golven?

Licht is een EM golf die zich met de snelheid van het licht voortplant. Ralf heeft laten zien dat je daarmee het 3 polarisatoren experiment kunt verklaren. Hij gebruikte daarvoor een ander soort golf die overeenkomt met de golf die we gebruiken in de quantummechanica. De klassieke lichtgolf is een EM golf. In elektrodynamica kun je de intensiteit (energie) van de golf berekenen uit het kwadraat van de amplitude. Als je licht als een verzameling fotonen opvat, en als die fotonen energiepakketjes zijn ($E_{foton} = h\nu$) dan is de intensiteit dus een maat voor het aantal fotonen. Het kwadraat van de amplitude van een EM golf is dus evenredig met de kans om een foton aan te treffen.

In de quantummechanica hebben we het over een ander soort golf.

Nadat Einstein Planck's kwanta idee dat licht bestaat uit lichtpakketjes met energie $h\nu$ had gebruikt om het foto-elektrisch effect te verklaren, paste Niels Bohr hetzelfde idee toe op de spectra van atomen om zijn atoommodel te maken. Na het succes van Bohr's atoom model was De Broglie de eerste die voorstelde dat ook massieve deeltjes met **materiegolven** (of golfpakketjes) geassocieerd zouden worden. Hij kon Bohr's atoommodel onderbouwen door te veronderstellen dat elektronen -als staande golven- alleen op bepaalde afstanden rond de

kern van een atoom kunnen bewegen. De golflengte zou moeten samenhangen met de impuls van het deeltje volgens $\lambda = h/p$, met $p = mv_g$. De snelheid van een deeltje is dan gelijk aan v_g , de groepssnelheid van het golfpakketje. Schrödinger stelde voor om de toestand van een deeltje te beschrijven met complexe “toestandsvectoren”, ook wel golffuncties genoemd. Een toestandsvector kan alle eigenschappen omvatten die een deeltje kan hebben, zoals spin, positie, impuls, enz. Iedere eigenschap leeft in een eigen vectorruimte die een eindig aantal dimensionaal kan zijn zoals de spin van een deeltje (2D) of oneindig dimensionaal zoals de positie (of impuls) langs de x-as. De toestandsvector van een deeltje dat beweegt langs de x-as wordt vaak een golffunctie genoemd en geschreven als $\psi(x)$. De golffunctie is niet hetzelfde als de toestandsvector. De golffunctie $\psi(x)$, beschrijft bijvoorbeeld hoe de toestandsvector wordt geschreven in de basisvectoren van de positieoperator. De golffunctie is een representatie van de toestandsvector. **In 5.6 zullen we het onderscheid tussen toestandsvector en golffunctie nader definiëren.** De (tijd-afhankelijke) Schrödinger vergelijking schrijft dan voor hoe de toestandsvector (en ook de golffunctie) evolueert (hoe het deeltje beweegt) in de loop van de tijd. De amplitude van de golffunctie wordt ook wel de “probability amplitude” genoemd. *Het kwadraat van die probability amplitude is de waarschijnlijkheid dat een deeltje een bepaalde eigenschap heeft, bijv. dat het zich op een bepaalde plaats bevindt*, of een bepaalde spin heeft. Die “probability amplitude” komt overeen met de amplitude van de EM golf, maar het is een ander soort golf: de golffunctie in het kwadraat: $\psi^*(x)\psi(x) = |\psi|^2$ geeft de waarschijnlijkheid dat het deeltje op positie x is. In het geval van fotonen is de waarschijnlijkheid analoog aan de intensiteit van een EM golf en daarmee aan de fotonendichtheid, maar de quantummechanische golf is een ander soort golf.

Klassieke golven, zoals EM golven, kun je ook als vectoren beschouwen

$$\phi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$$

Ze hebben een grootte, een richting, je kunt ze optellen (interferentie) en de componenten in verschillende richtingen berekenen (met het inproduct). Hun amplitude bepaalt de energie van het trillende medium. In de quantummechanica zijn toestandsvectoren de dragers van eigenschappen van deeltjes zoals positie, impuls, spin, enz. De (complexe) toestandsvectoren in de quantummechanica hebben ook een golvend tijdsverloop waardoor ze een verschijnsel als interferentie kunnen verklaren, maar hun amplitude in het kwadraat beschrijft de waarschijnlijkheid dat een meting een bepaalde waarde van de beschreven eigenschap oplevert. Wiskundig zijn het “vectoren in een Hilbert ruimte” (zie later in deze syllabus). Onthoudt dat de eigenschappen van een deeltje weergegeven kunnen worden met eindig-dimensionale vectoren (zoals de spin) of oneindig-dimensionale vectoren (zoals de positie) die samen de Hilbert ruimte vormen.

3. Het EPR artikel (1935)

Einstein wilde niet accepteren dat de quantummechanica een complete theorie was. Hij kon niet geloven dat een deeltje geen duidelijke positie en momentum zou hebben. Hij bestreed niet de resultaten van de theorie, maar kon niet geloven dat de natuur op toeval gebaseerd was en hij vermoedde dat er een onderliggende theorie moest zijn die het probabilistische karakter van de theorie zou verklaren. Die theorie zou dan op “verborgen variabelen” gebaseerd zijn die zich zouden houden aan de klassiek filosofische ideeën over de werkelijkheid. Hij ging er van uit dat fysische eigenschappen van deeltjes ook vóór de meting objectief bepaald zijn. Dat

is het geval in de klassieke mechanica. Bovendien realiseerde hij zich dat de theorie niet-lokaal was in de zin dat de golffunctie in B onmiddellijk kon veranderen als gevolg van een meting in A. Dat is in strijd met het principe dat informatie niet sneller dan het licht van A naar B kan reizen. In 1935 publiceerde hij samen met Podolsky en Rosen (EPR) een artikel waarin hij deze problemen aan de orde stelde aan de hand van twee deeltjes in “verstrengelde” toestand.

3.1 Wat is een verstrengelde toestand (zie ook 7.1)

We zijn er aan gewend dat 2 muntstukken beide kop of munt kunnen hebben. We beschouwen de muntstukken als gescheiden. Als A de ene munt opgooit en B de andere, en de munten zijn identiek, zullen ze beide in 50% van de gevallen kop en in 50% van de gevallen munt tonen. Als A en B beide een reeks van 1000 gooien doen en ze vergelijken hun resultaten zullen ze geen correlatie tussen hun resultaten vinden. Stel nu dat A een munt opgooit. Tijdens de worp zouden we kunnen zeggen dat de munt in een superpositie van kop (k) en munt (m) is. In de quantummechanica wordt A's munt beschreven met een golffunctie (of ket) die in een **superpositie toestand** beschrijft van de toestanden k en m

$$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle_A + |m\rangle_A)$$

Hier wordt Dirac's “ket” notatie voor de toestandsvectoren gebruikt (zie hfdst 5). Als de munt op de grond komt (de meting) stort de golffunctie in en wordt gelijk aan $|k\rangle$ of $|m\rangle$. Deze twee toestanden zijn “orthogonaal”, d.w.z. dat hun inproduct $\langle k_A | m_A \rangle = 0$ (zie Hfdst. 5). De kans dat A kop gooit is $\langle k_A | \psi \rangle_A = 1/2$, en idem voor munt. Voor B's munt kunnen we een zelfde toestand opschrijven. Zolang de munten van A en B gescheiden levens lijden kunnen we de toestand van elk tweetal van hun munten apart beschrijven of als de combinaties van kop of munt. Er zijn dan 4 toestanden waarin de munten duidelijk kop of munt zijn: $|k\rangle_A |k\rangle_B$, $|m\rangle_A |m\rangle_B$, $|k\rangle_A |m\rangle_B$ en $|m\rangle_A |k\rangle_B$. We kunnen ook toestanden maken zoals $|\psi\rangle_A |k\rangle_B$, waarin A in een superpositie toestand is en B kop heeft. De toestanden die we kunnen maken vallen uiteen in twee soorten:

“**Product**” toestanden waarin de toestanden van A en B gescheiden zijn. Er is dan geen correlatie tussen hun resultaten. Dit zijn gecombineerde toestanden die geschreven kunnen worden als een tensor product (zie 7.1 en 10.4)

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$$

Bijv. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle_A |m\rangle_B + |m\rangle_A |m\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle_A + |m\rangle_A) |m\rangle_B$. Dit zijn klassieke toestanden.

“**Verstrengelde**” toestanden die niet op die manier geschreven kunnen worden, bijv.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle_A \otimes |k\rangle_B + |m\rangle_A \otimes |m\rangle_B)$$

A en B krijgen 100x een lid van een verstrengeld paar mee. Ze gooien die op en houden het resultaat bij. A bekijkt zijn lijstje en constateert dat kop en munt willekeurig voorkomen in een verhouding van ongeveer 50-50. B constateert hetzelfde, maar als ze hun lijstjes naast elkaar leggen blijkt dat B altijd munt heeft als A munt heeft en idem voor kop. De kans dat A kop heeft en B munt is 0. A en B vinden dat hun resultaten volledig met elkaar overeenkomen (maximale correlatie). Hoe kan dat? In de volgende paragraaf gaan we daar verder op.

3.2 Spooky action at a distance

De verstrengelde toestand die hierboven staat kan gerealiseerd worden met fotonen die Horizontale of Verticale polarisatie richting hebben. Het is mogelijk (met Type II down-conversion) om fotonenparen te maken waarvan de één Horizontaal en de andere Verticaal is gepolariseerd. (beide Horizontaal of Verticaal kan ook, zie [4.2](#) en hfdst [8.1](#)). De fotonen bevinden zich in de een verstrengelde toestand (dit wordt in [Hfdst. 7](#) verder uitgewerkt):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|V\rangle_B + |V\rangle_A|H\rangle_B)$$

hebben. Alice en Bob kunnen meten of een foton Horizontaal of Verticaal gepolariseerd is. Als Alice Horizontaal vindt dan is de 2-deeltjes golf functie in de toestand $|H\rangle_A|V\rangle_B$ gekomen en weten we dat Bob Verticaal zal vinden *terwijl B geen meting heeft gedaan* en de toestand van Bob's foton onbepaald was voordat Alice de meting deed. In het EPR artikel wordt een definitie gegeven van wat EPR een "element of reality" noemen: *"Wanneer we met zekerheid de waarde van een fysische grootheid kunnen voorspellen, dan bestaat er een element van fysische realiteit dat overeenkomt met die fysische grootheid"*. Bob zou kunnen bevestigen dat zijn foton Verticaal is gepolariseerd. Dat voldoet dus aan de definitie van "element of reality". Alice kan haar foton ook meten met de polarisator onder een hoek van 45 graden. Voor dergelijke metingen kunnen we de toestanden $|H\rangle$ en $|V\rangle$ schrijven in de twee verticale richtingen $|+\rangle$ en $|-\rangle$

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle),$$

En

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$$

(Zie ook Ralf's workshop).

We kunnen - na invullen van de eerste twee vergelijkingen - de verstrengelde toestand schrijven als

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} [|+\rangle_A(|V\rangle_B + |H\rangle_B) + |-\rangle_A(|V\rangle_B - |H\rangle_B)]$$

Veronderstel nu dat Alice met haar polarisator onder een hoek van 45 graden $|+\rangle$ meet, dan weet ze dat Bob's foton ook $|+\rangle$ moet zijn. Die toestand zou dan ook een "element of reality" moeten zijn. De polarisatie toestand Bob's foton kan dan volgens de quantummechanica geen element van fysische realiteit kan zijn. Daar komt nog bij dat Bob's foton plotseling een goed bepaalde eigenschap zou krijgen op *hetzelfde moment waarop Alice de meting deed*. Dit is wat Einstein "spooky action at a distance" noemde: informatie lijkt sneller dan het licht overgebracht te zijn. Dat zou je een vorm van niet-lokaliteit kunnen noemen. In werkelijkheid heeft er echter geen informatie overdracht tussen Alice en Bob plaatsgevonden. Er is sprake van een correlatie tussen de random resultaten van de metingen van A en B (een soort niet-lokaliteit) die we (nog) niet klassiek kunnen verklaren. Deze vorm van niet-lokaliteit geldt overigens ook voor het instorten van de golf functie door een meting. Je kunt deze vorm van niet-lokaliteit misschien vergelijken met de bewegende lichtvlek die over een muur beweegt die op grote afstand van de ronddraaiende vuurtoren staat.

4. De wereld bestaat uit quantum bits

Planck's oplossing van de UV catastrofe leidde tot de ontwikkeling van de quantummechanica. Een nieuwe theorie waarin de wereld bestaat uit quantum bits (een bit is een basis eenheid van informatie) die in slechts 1 van 2 toestanden kan zijn. Je zou de wereld dus ook een quantumcomputer kunnen noemen. De bewerkingen die in de computer plaats vinden moeten dan wel in overeenstemming zijn met de quantummechanica, inclusief verschijnselen als verstrengeling. Dat lukt niet in een klassieke computer. De basiseenheden van de quantumcomputer moeten uit quantum bits, of qubits, bestaan.

Voorbeelden van bits: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ja of nee, zwart of wit. Het klassieke quantummechanische voorbeeld is de "spin". N.B. Een elektron heeft spin $\sigma = +\hbar/2$, of $\sigma = -\hbar/2$, of

$$\sigma_{up} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{of} \quad \sigma_{down} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De spin van een elektron, of de polarisatie richting van een foton, zijn voorbeelden van qubits.

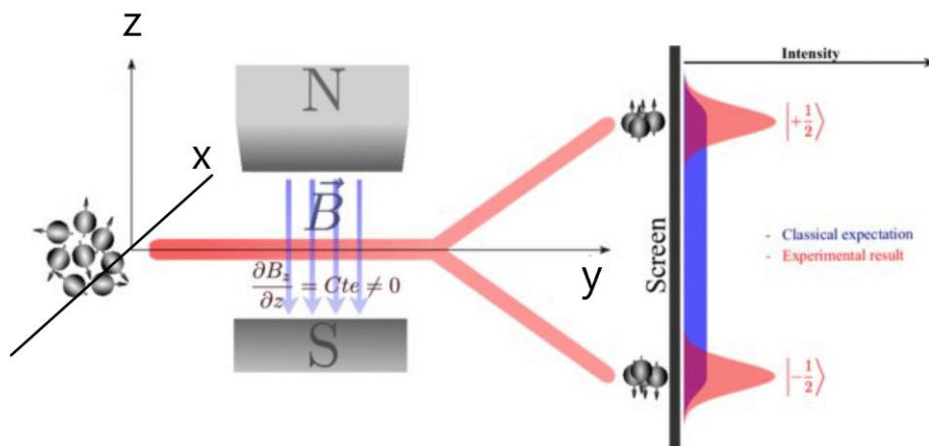
4.1 Spin statistiek

[https://en.wikipedia.org/wiki/Spin_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spin_(physics))

<https://elkement.art/2021/10/26/spins-rotations-and-the-beauty-of-complex-numbers/>

The Stern-Gerlach experiment (1925)

[Stern-Gerlach experiment - Wikipedia](#)



Links komen Cesium atomen uit een oven langs het rode pad. Het magnetisch dipool moment van de atomen is willekeurig gericht. Wanneer de atomen door het inhomogene magnetenveld (loodrecht op hun baan) vliegen worden de atomen gesplitst in atomen met spin up en atomen met spin down. Een homogeen magnetenveld zal de magneetjes alleen in N-Z richting oriënteren. Een inhomogeen veld zorgt er voor dat de noord en zuidpool een verschillend magnetenveld voelen waardoor ze gaan bewegen in Noord of Zuid richting afhankelijk van hun oriëntatie. De waargenomen verdeling (de twee rode pieken) is in strijd met de klassieke theorie (de blauwe verdeling) van magnetische dipolen en hun interactie met een inhomogeen magnetenveld. De atomen lijken één van de twee richtingen te "kiezen". Draaiing van het magnetenveld in het vlak loodrecht op de baan van de deeltjes levert steeds hetzelfde resultaat.

Meting van de spinrichting van de deeltjes lijkt de deeltjes tot een keuze van 1 van de twee spinrichtingen te dwingen: spin up, of spin down. Tussenliggende waarden (de blauwe verdeling) komen niet voor. Dat blijft zo wanneer je het apparaat om de bundel draait.

We kunnen een aantal experimenten doen om de nieuwe werkelijkheid beter te leren kennen. We laten de deeltjes dan bijvoorbeeld 2 of 3 maal door een Stern-Gerlach SG apparaat gaan waarbij we het magneteveld om de deeltjesbundel – in het z-x-vlak - kunnen draaien. We noemen de richting van het magneteveld van het eerste SG apparaat de z-richting (figuur 1.3a hieronder).

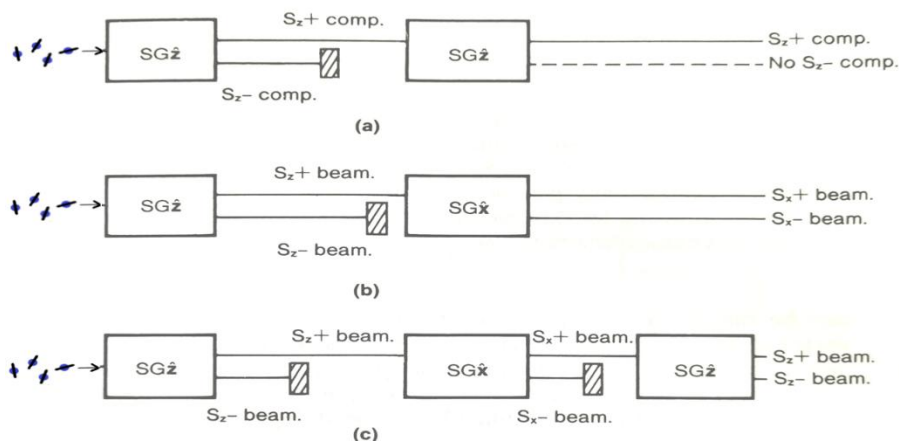


FIGURE 1.3. Sequential Stern-Gerlach experiments.

Uit "Modern Quantum Mechanics" van J.J. Sakurai

De bundel wordt door het SG apparaat gesplitst in een Sz+ en een Sz- bundel. Ieder foton dat door het instrument gaat blijkt in 50% van de metingen een spin "up" en in 50% van de metingen een spin "down" te hebben).

We blokkeren nu de Sz- bundel en laten de Sz+ bundel door een tweede SGz apparaat gaan (fig. 1.3b). We detecteren dan alleen de Sz+ component. Vervolgens draaien we het tweede SG apparaat zodat het magneteveld in de x-richting wijst. We zien nu dat de binnenkomende Sz+ bundel wordt gesplitst in een Sx+ component en een Sx- component. Dit lijkt op wat we in polarisatie experimenten zien. Blijkbaar kun je de Sz+ bundel opvatten als een combinatie Sx+ en Sx-.

Tenslotte blokkeren we de Sx- component van het tweede experiment en zetten er nog een SG apparaat achter (fig. 1.3c). Deze keer is het SG apparaat weer terug gedraaid naar de z-richting. De inkomende bundel is nu de Sx+ bundel. We vinden nu dat deze bundel weer bestaat uit Sz+ en Sz- deeltjes, hoewel de bundel die het tweede SG apparaat inging alleen uit Sz+ deeltjes bestond. Alle Sz- deeltjes waren geblokkeerd na het eerste SG apparaat!??? Dit geldt ook voor individuele deeltjes die je stuk voor stuk door het apparaat laat gaan.

Hoe kan dat? De klassieke logica lijkt hier niet op te gaan. Klassiek kan een deeltje wel of niet een bepaalde eigenschap hebben. De spin in de z+ richting is zo'n eigenschap. Als je het deeltje onderwerpt aan de proef in 1.3a weet je of het deeltje spin up of down (u of d , of $\sigma_z = \uparrow$ of $\downarrow$) heeft. Laten we Susskind's argumentatie eens volgen waarin hij concludeert dat de volgorde van meting invloed heeft op het eindresultaat.

Als $\sigma_z = \uparrow$ dan zeggen we dat A "true" is. Als $\sigma_x = \uparrow$ dan zeggen we dat B "true" is. We doen 4 metingen: eerst A meting in de z-richting, en dan B (meting in de x-richting), en daarna eerst B en dan A. We vragen ons af wat de kans is dat A of B (1 van de twee dus) waar is, en of de volgorde van meting iets uitmaakt.

Klassiek verwachten we dat de volgorde niet uitmaakt.

Eerst meten we de spin in de z-richting: stel dat $\sigma_z = \uparrow$ dan is A true. (A of B) is dan ook true onafhankelijk van de volgende meting in de x-richting.

Als $\sigma_z = \downarrow$ (A is false) dan meten we vervolgens in de x-richting. Het resultaat is $\uparrow$ of $\downarrow$. Dus we hebben in totaal 75% kans dat (A of B) false is. Als we de volgorde van meting omdraaien vinden we hetzelfde resultaat: **75% kans dat (A of B) false is, en (A of B) = (B of A)**

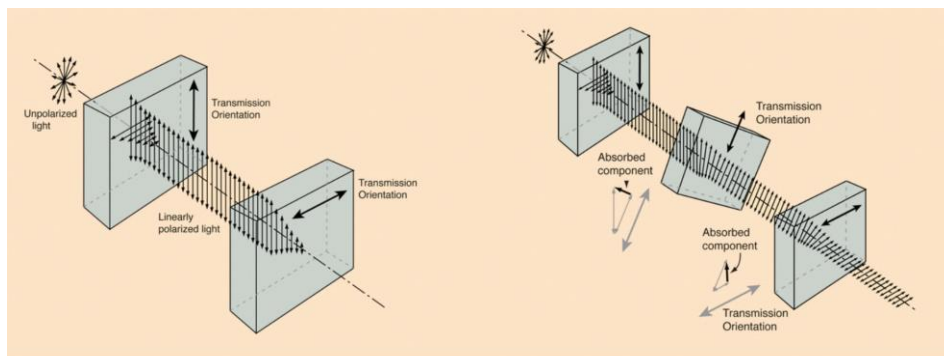
Nu gaan we er van uit dat de spin in de z-richting bekend is: $\sigma_z = \uparrow$. We weten dat de meting van de spin in de x-richting $\uparrow$ of $\downarrow$. zal opleveren. Dat houdt in dat de **kans 50% is dat (A of B) false is**. Vervolgens draaien we de volgorde om: we meten eerst σ_x . De kans dat $\sigma_z = \downarrow$ is 50%. Daarna meten we σ_z . Weer vinden we dat $\sigma_z = \uparrow$ of $\downarrow$. . De **kans dat (B of A)=false is dus nu 25%**. Dus **(A of B) $\neq$ (B of A)**.

Dat is niet het gedrag dat we van een klassieke ruimtelijke vector kennen.

4.2 Vergelijking met polarisatie experiment.

Wanneer je experimenteert met polarisatie filters kom je een soortgelijk verschijnsel tegen als het hierboven beschreven Stern-Gerlach experiment.

Twee tegengesteld georiënteerde polarisatie filters (90 graden) doven het licht van een (ongepolariseerde) lichtbron uit, maar wanneer je er een derde polarisatiefilter tussen houdt verschijnt er toch weer licht. Die hoeveelheid licht is maximaal wanneer de derde (tussenliggende) filter een hoek van 45 graden met de andere twee filters maakt.



Crossed polarizer images from Rod Nave's [hyperphysics](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/inter/polar.html)

In het geval van de polarisatiefilters kun je argumenteren dat het (in de z-richting, of Verticale richting) gepolariseerde licht dat uit de eerste filter komt een richtingsvector heeft die je kunt opvatten als een combinatie van twee componenten: één in de +x en één in de -x richting (zie ook [3.2](#)).

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

Het tussenfilter selecteert dan 1 van die twee componenten. Die component, bijv. de $|+\rangle$ kun je dan weer opvatten als een vector met een Horizontale en een Verticale component.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$$

Het laatste filter dooft de x-component uit, en zo blijft er een Verticale component over. Dat lijkt op wat we bij het SG experiment zien en het kan verklaart worden wanneer we de polarisatie-richting opvatten als een klassieke ruimtelijke vector. Er is echter een belangrijk verschil: Het SG experiment laat zien dat de spin van een elektron geen gewone ruimtelijke vector is. Als dat wel zo was, zou de hoekverdeling het blauwe patroon in fig 1.3 hierboven vertonen en niet de 2 gescheiden pieken (hoewel de gemiddelde waarde van de twee pieken wel een cosinus verloop heeft). Bovendien is het niet duidelijk hoe je bovenstaand polarisatie experiment klassiek kan verklaren wanneer licht uit fotonen bestaat.

5. Quantummechanische beschrijving van fysische toestanden.

In de quantummechanica worden fysische toestanden anders beschreven dan in de klassieke fysica. De spin state wordt niet beschreven door een gewone vector, maar door een “toestandsvector”. **Zo’n toestandsvector is geen gewone drie-dimensionale vector in de ruimte, maar een (complexe) vector in een 2- of meer dimensionale ruimte die een aspect van de toestand van een deeltje beschrijft.** De ruimte waarin deze toestandsvectoren leven wordt wel de **Hilbert ruimte** genoemd. Ze lijken wel op klassieke vectoren in de zin dat ze zich moeten houden aan de wiskundige regels van **lineariteit**, d.w.z. dat als $|\psi_1\rangle$ en $|\psi_2\rangle$ quantum toestanden zijn dan is $\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$ ook een mogelijke quantum toestand, en als we een operator **A** op deze toestand in laten werken geldt ook dat $A(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle) = \alpha A|\psi_1\rangle + \beta A|\psi_2\rangle$. De toestandsvector van een deeltje kan bijv. de positie, en/of de spin van een deeltje beschrijven: $\Psi(x, \sigma)$. De toestandsvector leeft in een ruimte (de Hilbert ruimte) die is opgebouwd uit complexe vectoren. Toestandsvectoren kunnen een eindige dimensie hebben, zoals de spin (2-dimensionaal) of een oneindig aantal dimensies zoals de positie of de impuls. Er is ook een inproduct voor de toestandsvectoren gedefinieerd. 2 vectoren zijn onafhankelijk van elkaar (orthogonaal) als hun inproduct 0 is. Orthogonale vectoren vertegenwoordigen toestanden die duidelijk van elkaar te onderscheiden zijn. Een N-dimensionale ruimte bevat N vectoren die onafhankelijk van elkaar zijn. Die N orthogonale vectoren spannen samen de N-dimensionale ruimte op. We zeggen dan dat die vectoren een “basis” vormen voor de toestandsvectoren in die ruimte. Iedere toestandsvector in die ruimte is te schrijven als een combinatie van deze orthogonale vectoren. In het algemeen werken we met orthonormale bases waarin de vectoren ook genormeerd zijn.

De variabelen die we kunnen waarnemen worden gerepresenteerd door “operatoren” die werken op de toestandsvectoren. Die operatoren moeten lineair zijn (om superpositie mogelijk te maken) en Hermitisch (zodat ze reële eigenwaarden opleveren, zie [5.3 Operatoren en Eigenwaarden](#)). Voordat we operatoren bespreken zullen we een paar voorbeelden van toestandsvectoren geven en daarbij Dirac’s notatie voor de toestandsvectoren introduceren.

5.1 Dirac’s notatie; het inproduct en uitproduct van toestandsvectoren.

De toestandsvector die zowel spin als positie beschrijft leeft dus in een ruimte die 2 (spin) + ∞ (positie) + dimensies heeft. Dirac heeft een nieuwe notatie voor toestandsvectoren

(“de bra-ket” notatie) ingevoerd die in de praktijk erg handig blijkt. De toestandsvectoren noemde hij “kets”. Een toestandsvector is een complex getal of functie en heeft dus een complex geconjugeerde, de “bra”. Ze worden geschreven als

$$ket = |\Psi\rangle \quad bra = \langle\Psi|$$

De ket kan een functie zijn, maar kan ook een 2- of meer-dimensionale kolomvector zijn. De “bra” is dan de overeenkomstige (**complex geconjugeerde en getransponeerde**) rij-vector. We zeggen dat $\langle\Psi|$ de **Hermitisch geconjugeerde** is van $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \langle\Psi| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}^\dagger = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^*)$$

Je kunt deze “ket” vectoren niet alleen net als gewone vectoren bij elkaar optellen en aftrekken en met een reëel getal vermenigvuldigen, maar je kunt ze ook met een complex getal vermenigvuldigen. Dat geldt ook voor “bra” vectoren. Je moet er wel rekening mee houden dat de complex geconjugeerde (de “bra”) van $z|A\rangle$ gelijk is aan $\langle A|z^*$. Voor iedere “ket” is er dus een complex geconjugeerde “bra”. Ze vormen duale koppels. *Het grote voordeel is dat “kets” en “bras” inproducten kunnen vormen: $\langle B|A\rangle$ die vergelijkbaar zijn met het inproduct van klassieke vectoren.* Voor dat inproduct geldt: dat het lineair is:

$$\langle C\{|A\rangle + |B\rangle\} = \langle C|A\rangle + \langle C|B\rangle$$

En dat

$$\langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^*$$

Als $|A\rangle$ en $\langle B|$ matrices zijn dan geldt dat

$$\langle B|A\rangle = (\beta_1^*, \beta_2^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2$$

Het is nu niet moeilijk te bewijzen dat $\langle A|A\rangle$ een reëel getal is. Dit is een erg belangrijke constatering, omdat dit inproduct van een ket met zichzelf de waarschijnlijkheid van een gemeten grootheid bepaald. Als een systeem in een bepaalde toestand is geprepareerd, d.w.z. er is een fysieke procedure uitgevoerd die ervoor zorgt dat het systeem wordt beschreven door een **specifieke kwantumtoestand** $|\psi\rangle$, bijv. $|A(\sigma_1)\rangle$ en we meten σ_1 , dan geeft $\langle A(\sigma_1)|A(\sigma_1)\rangle$ de waarschijnlijkheid dat we de waarde σ_1 meten.

Het inproduct kan gebruikt worden om orthogonale vectoren te definiëren net als gewone vectoren: Twee vectoren zijn orthogonaal als $\langle B|A\rangle = 0$. Een vector is genormaliseerd als $\langle A|A\rangle = 1$. Op deze manier kunnen we een “orthonormale” basis voor de Hilbert ruimte vinden waarvan de ket vectoren orthogonaal en genormaliseerd zijn. Laten we die basisvectoren $|i\rangle$ noemen waarin i loopt van 1 tot de diensie van de ruimte (kan ∞ zijn). Idem voor de duale vectoren $\langle j|$. Iedere ket vector kan dan geschreven worden als een combinatie van deze vectoren:

$$|A\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |i\rangle$$

We kunnen de waarde van de componenten α_i ‘s berekenen door het inproduct van $|A\rangle$ met $\langle j|$ te nemen:

$$\langle j|A\rangle = \sum_i \alpha_i \langle j|i\rangle = \alpha_j$$

Zo kunnen α_i dus schrijven als $\langle i|A\rangle$. De voorlaatste formule wordt dan

$$|A\rangle = \sum_{i=1}^N |i\rangle \langle i|A\rangle = I|A\rangle$$

Zo schrijf je de toestand $|A\rangle$ als de som van de projecties van $|A\rangle$ op de basisvectoren $|i\rangle$, of als een combinatie van (orthonormale) basisvectoren. De operator

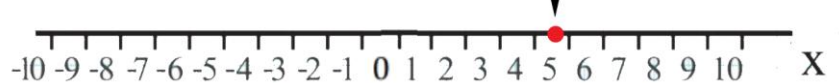
$$P = \sum_{i=1}^N |i\rangle \langle i|$$

noemen we de projectie operator, en het product $|i\rangle \langle j|$ noemen we het **uitproduct** van $|i\rangle$ en $|j\rangle$ (zie ook [8.3.1](#)). De operator I is de identiteitsoperator:

$$I = \sum_{i=1}^N |i\rangle \langle i|, \text{ of } I = \int dx |x\rangle \langle x|, \text{ of } I = \int dp |p\rangle \langle p| \dots$$

5.2 Oneindig –dimensionale toestandsvectoren

De positie en impuls van een deeltje worden beschreven met toestandsvectoren die oneindig-dimensionaal zijn. Er zijn immers een oneindig aantal mogelijkheden waar een deeltje zich in de ruimte (bijv. langs de x-as) kan bevinden. In de discrete wereld van de (kolom) matrices bestaan er ook matrices waarin het aantal indices oneindig kan zijn ($i = 1 \dots \infty$). Je kunt een positie dan selecteren door alle kolom matrices te vermenigvuldigen met de **Kronecker delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases} \quad j = 5$$


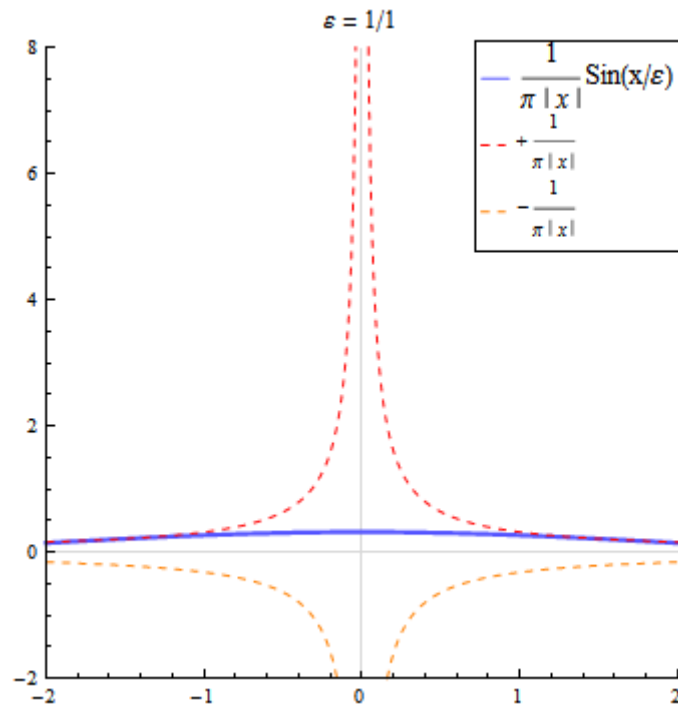
$$\text{Kronecker delta} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

$$a_i = \sum_{j=1.. \infty} \delta_{ij} a_j$$

Voor continue functies bestaat er ook een functie die er voor zorgt dat een functie in slechts 1 punt van de ruimte de waarde 1 heeft en verder overal 0. Deze functie is uitgevonden door Dirac. Hij is als volgt gedefinieerd.

$$\text{Dirac deltafunction} \quad \delta(x - x_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \neq x_j \\ \infty & \text{als } x = x_j \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Hieronder zie je een functie die in de limiet van $\varepsilon \rightarrow 0$ de delta functie oplever (zie ook [9.4: The Dirac Delta Function - Mathematics LibreTexts](#))



$$f(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx$$

Een andere voorbeeld van een functie die de delta functie benadert is

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-i(nx)^2}$$

Deze functie benadert de deltafunctie wanneer $n \rightarrow \infty$.

Eigenschappen van de delta functie:

De delta functie is de Fourier transformatie van $F(x) = 1$, nl

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2 \sin vx}{x} \quad \text{of ... (Susskind)}$$

Zie ook andere uitdrukkingen voor de delta functie: [Dirac delta function - Knowino](#)

$$(x - a) \delta(x - a) = 0$$

$$\delta(ax) = [a]^{-1} \delta(x), \quad (a \neq 0)$$

Derivative:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d\delta(x)}{dx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} \delta(x) dx = -f'(0)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$$

5.3 Operatoren en Eigenwaarden

De toestandsvector (ket) geeft informatie over de fysische eigenschappen van een systeem waarop we metingen willen doen. Hoe destilleren we die informatie uit de toestandsvector in een meting. Daarvoor gebruiken we operatoren. Als je een eigenschap van het systeem wilt meten gebruik je de operator die hoort bij de eigenschap (positie, impuls, spin,...) die je wilt meten. De operator werkt op de (complexe) toestandsvector en levert daarmee een reëel waarde van een fysische eigenschap. De operator moet dus reëel getallen opleveren. Aan die eis wordt voldaan wanneer de operator Hermitisch is (zie verder). Operatoren transformeren de toestandsvector. Als de toestandsvector alleen in grootte verandert is die vector een eigenvector en weten we exact in welke toestand (een eigentoestand) het systeem zich bevindt en welke waarde (de eigenwaarde) de fysische eigenschap heeft. Als dat niet het geval is dan is de vector een superpositie van eigenvectoren.

Nu een wat meer formele beschrijving:

Fysische observabelen worden in de quantummechanica gerepresenteerd door de eigenwaarden van lineaire (Hermitische) operatoren. Een operator voert een bewerking uit op een ket. Dat kan van alles zijn: vermenigvuldiging, machtsverheffen, integratie, differentiatie, e.d. Voorbeelden zijn bijv. de positie operator: x , die met de golffunctie wordt vermenigvuldigt, de impuls operator $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ (zie 5.11), de energieoperator

(Hamiltoniaan) $H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$, en de spin operator in de richting van z (zie later in dit document):

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Als je deze operator op $|up\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ of $|down\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ laat werken komt er $\hbar/2$ of $-\hbar/2$ uit.

Een lineaire operator voert een bewerking uit op een ket die weer een ket oplevert: $M|A\rangle = |B\rangle$. Verder moet ook gelden dat $Mz|A\rangle = z|B\rangle$ en $M\{|A\rangle + |B\rangle\} = M|A\rangle + M|B\rangle$.

Operatoren voeren een bewerking uit op kets en bras waardoor ze in het algemeen veranderen in richting en grootte. Wanneer die verandering alleen een vermenigvuldiging met een (complex) getal betreft (dus alleen de grootte verandert) noemen we zo'n vector een **eigenvector**, en het getal waarmee de vector vermenigvuldigd wordt een **eigenwaarde**. Een eigenvector is dus een ket of bra waarvoor geldt dat voor een operator M geldt

$$M|A\rangle = a|A\rangle$$

waarin a de eigenwaarde is.

Die eigenwaarden kunnen natuurlijk niet complex zijn. Fysische grootheden worden immers uitgedrukt in reëel getallen. Om er voor te zorgen dat de eigenwaarden reëel zijn wordt de extra eis gesteld dat de operatoren van die observabelen Hermitisch (Hermitisch betekent complex conjugeren en transponeren) moeten zijn. Voor complexe getallen betekent dat dat gelijk moeten zijn aan hun complex geconjugeerden (de complex geconjugeerde van $z = a +$

ib is $z^* = a - ib$). Immers, als $a = a^*$, dan is a reëel. Wanneer we te maken hebben met matrices moet de operator ook getransponeerd worden (transponeren = verwisselen rijen en kolommen). Dus in het algemeen geldt voor een Hermitische operator

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{M}^T)^*$$

Als een operator Hermitisch is dan geldt:

$$\mathbf{M}|A\rangle = |B\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle B|\mathbf{M}^\dagger = \langle B|$$

We kunnen nu bewijzen dat de eigenwaarden van Hermitische operatoren reëel zijn. Als a een eigenwaarde is van de operator $\mathbf{M}$ werkend op de eigenfunction $|A\rangle$ dan geldt

$$\mathbf{M}|A\rangle = a|A\rangle$$

Hermitisch conjugereren van deze vergelijking levert

$$\langle A|\mathbf{M}^\dagger = \langle A|a^* \quad \text{en dus} \quad \langle A|\mathbf{M} = \langle A|a^*$$

Vermenigvuldigen van deze 2 vergelijkingen met $\langle A|$ resp. $|A\rangle$ levert dan

$$\langle A|\mathbf{M}|A\rangle = a^*\langle A|A\rangle$$

En

$$\langle A|\mathbf{M}|A\rangle = a\langle A|A\rangle$$

waarmee bewezen is dat $a = a^*$, en dus dat a reëel is.

We zijn er hierboven van uitgegaan dat $|A\rangle$ een eigenvector is. In het algemeen gaan we er van uit dat de toestand waaraan we een meting willen doen een (lineaire) combinatie is van eigenvectoren, bijv.

$$|A\rangle = |A_1\rangle + |A_2\rangle$$

Als we de operator hierop laten werken vinden we

$$\mathbf{M}|A\rangle = a_1|A_1\rangle + a_2|A_2\rangle$$

We kunnen nu laten zien dat de eigenvectors orthogonaal zijn als $\mathbf{M}$ Hermitisch is, immers $\langle A_1|\mathbf{M} = \langle A_1|a_1$ en $\mathbf{M}|A_2\rangle = a_2|A_2\rangle$. N $\mathbf{M}|A\rangle$ neem het inproduct van de eerste vergelijking met $|A_2\rangle$ en het inproduct van de tweede met $\langle A_1|$, en trek de twee vergelijkingen van elkaar af. Je vindt dan dat $(a_1 - a_2)\langle A_1|A_2\rangle = 0$. Als de eigenwaarde ongelijk zijn moeten de eigenvectoren dus orthogonaal zijn. Het kan ook voorkomen dat een operator twee verschillende eigenfuncties heeft die dezelfde eigenwaarde hebben. Je kunt die twee eigenvectoren dan zo kiezen dat ze orthogonaal zijn (Susskind p. 66).

5.4 Operatoren in matrixvorm (S. 3)

We willen nu de vergelijking

$$\mathbf{M}|A\rangle = |B\rangle$$

In matrixvorm schrijven. Eerst schrijven we $|A\rangle$ en $|B\rangle$ in basisvectoren: $|A\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$ en $|B\rangle = \sum_j \beta_j |j\rangle$. De vergelijking wordt nu

$$\mathbf{M}|A\rangle = \mathbf{M} \sum_i \alpha_i |i\rangle = \sum_i \beta_i |i\rangle$$

Vervolgens nemen we het inproduct van het linker en rechter deel van deze vergelijking met een basisvector $\langle k|$

$$\sum_i \alpha_i \langle k|\mathbf{M}|i\rangle = \sum_i \beta_i \langle k|i\rangle = \beta_k$$

We kunnen $\langle k|\mathbf{M}|i\rangle$ nu opvatten als de elementen van een matrix, bijv een 3x3 matrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

De voorlaatste vergelijking wordt dan $\sum_i \alpha_i m_{ki} = \beta_k$. Dit kunnen we ook in matrixvorm schrijven:

$$\mathbf{M}|A\rangle = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

En evenzo

$$\langle B|\mathbf{M} = (\beta_1^* \quad \beta_2^* \quad \beta_3^*) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

N.B. wanneer $\mathbf{M}|A\rangle = |B\rangle$, dan geldt ook dat $\langle A|\mathbf{M}^\dagger = \langle B|$, waarin $\mathbf{M}^\dagger$ de hermitisch geconjugeerde matrix is: $\mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{M}^T)^*$, ofwel $m_{ji} = m_{ij}^*$.

In [5.8](#) zullen we zien dat de verwachtingswaarde (expectation value) van een operator wordt gegeven door $\langle A|\mathbf{M}|A\rangle$

5.5 Commuterende variabelen

Toestanden kun van verschillende variabelen afhangen. Voor iedere variabele is er een operator die de eigenwaarden (waarneembare grootheden) en eigenfuncties oplevert. Deze eigenfuncties vormen een orthogonale basis die hoort bij die operator. Stel nu dat een meting (operator A) het systeem in eigentoestanden $|A_i\rangle$ brengt met eigenwaarden α_i en dat een andere operator (B) het systeem in een eigentoestand $|B_j\rangle$ brengt met eigenwaarden β_j . We nemen nu aan dat er een basis is voor de toestandsvectoren $|A_i B_j\rangle$ die eigenvectoren zijn van beide operatoren.

$$\mathbf{A}|A_i B_j\rangle = \alpha_i |A_i B_j\rangle \quad \text{en} \quad \mathbf{B}|A_i B_j\rangle = \beta_j |A_i B_j\rangle$$

We berekenen nu wat AB en BA doen op deze toestanden:

$$\mathbf{BA}|A_i B_j\rangle = \mathbf{B}\alpha_i |A_i B_j\rangle \quad \text{en} \quad \mathbf{AB}|A_i B_j\rangle = \mathbf{A}\beta_j |A_i B_j\rangle$$

Dat betekent dat $BA|A_i B_j\rangle = AB|A_i B_j\rangle$ en dus dat $[AB - BA]|A_i B_j\rangle = 0$. We noemen $[AB - BA] = [A, B]$ de commutator van A en B. De commutator moet dus gelijk aan 0 zijn als 2 operatoren dezelfde eigenvectoren opleveren. Anders gezegd: **twee observabelen zijn alleen tegelijkertijd meetbaar als hun operatoren commuteren.**

5.6 De Golffunctie (Susskind 5.1 t/m 5.3, en 8.1)

In het begin van dit hoofdstuk hebben we gezien dat je een toestandsvector $|\Psi\rangle$ van “commuterende” (zie de vorige paragraaf) observabelen A, B, C met eigenwaarden a,b,c kan schrijven als een som van de componenten in de (genormaliseerde) orthogonale componenten van de Hilbert vector ruimte van die observabelen:

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b,c} |a, b\rangle \langle a, b|\Psi\rangle$$

In het rechterlid zien we $\langle a|\Psi\rangle$. Dat is de golffunctie die we meestal schrijven met de kleine griekse letter ψ :

$$\psi(a, b) = \langle a, b|\Psi\rangle$$

De golffunctie hangt dus af van de observeerbare (**A** of **B**) die we bestuderen. Bij de observeerbare **a** hoort de Hilbert ruimte van eigenfuncties $|a_i\rangle$ en (orthonorme) eigenwaarden (a_i) van de operator **A**. De golffunctie is de **representatie** van een toestandsvector $|\psi\rangle$ als de **projectie op een orthonormale (eigen)basis** van een operator in een Hilbertruimte. De toestandsvector voor **a** is dan $|\Psi_A\rangle = \sum_i a_i |a_i\rangle$. We zeggen dan dat de **golffunctie in de A –representatie** gegeven wordt door $\psi(a_i) = a_i$, en dus

$$|\Psi_A\rangle = \sum_i \psi(a_i) |a_i\rangle$$

We kunnen de golffunctie ook schrijven als

$$\psi(a) = \langle a|\Psi\rangle$$

wanneer we een orthonormale basis gebruiken zodat $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$. Zo kennen we de golffunctie voor de positie: $\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$, en de golffunctie voor de impuls $\psi(p) = \langle p|\Psi\rangle$.

De golffunctie bepaalt de waarschijnlijkheid $P(a, b, c)$ dat een meting van de (commuterende) observabelen de waarden **a, b, c** oplevert volgens de formule

$$P(a, b, c) = \psi^*(a, b, c)\psi(a, b, c) = \langle \Psi|a, b, c\rangle \langle a, b, c|\Psi\rangle$$

waarbij geldt dat $\sum_{a,b,c} P(a, b, c) = 1$

Er zijn 2 soorten observabelen: discrete (bijv. spin) en continue (positie, impuls). Zo zijn er ook twee types golffuncties: 1) de componenten van de toestandsvector in een basis, of 2) een functie van de continue variabele **a**

$$\psi(a) \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} \psi(a_1) \\ \psi(a_2) \\ \psi(a_3) \\ \psi(a_4) \end{pmatrix}$$

In het eerste geval gebruiken we sommaties over bijv. de eigenwaarden. In het tweede geval is dat een integraal over de variabele. In het eerste geval berekenen we de waarschijnlijkheid van uit $\psi^*(a)\psi(a)$, in het tweede geval uit een integraal over de waarschijnlijkheidsdichtheid $\psi^*(x)\psi(x)$. In het eerste geval gebruiken we de Kronecker delta. In het tweede geval de Dirac delta functie (zie [5.2](#)).

Principles of QM p 70

Schrodinger equation. Begin bij p 95/7, 102. U(t) 4.2. Dan p 120 en 283

5.7 Waarschijnlijkheid van de uitkomst van een meting (Susskind, p 106/7)

Als een systeem zich in de toestand $|A\rangle$ bevindt en we meten de observabele $\mathbf{M}$ dan zullen we een eigenwaarde van de operator $\mathbf{M}$ vinden. Het verschil met de klassieke mechanica is dat de uitkomst altijd een zekere waarschijnlijkheid heeft. De toestandsvector is meestal een (lineaire) combinatie (superpositie) van twee of meer eigenvectoren, bijv.

$$\mathbf{M}|A\rangle = a_1|A_1\rangle + a_2|A_2\rangle.$$

De twee termen in het rechterlid zijn de projecties op de eigenfuncties. $|A_1\rangle$ en $|A_2\rangle$ en a_1 en a_2 zijn de eigenwaarden. De toestand $|A\rangle$ kan dus geschreven worden als

$$|A\rangle = \sum_i |A_i\rangle \langle A_i|A\rangle$$

De component $\langle A_i|A\rangle$ noemen we ook wel de “golffunctie” $\psi(A_i) = \langle A_i|A\rangle$. We komen de laatste formule later ([8.3.1](#)) ook weer tegen. Daar definiëren we de “projectie operator” $|A_i\rangle\langle A_i|$ die de vector $|A\rangle$ projecteert op de richting van $|A_i\rangle$.

Eén van de basis principes van de quantummechanica is dat een meting van een observabele altijd de waarschijnlijkheid van de waarde van die observabele oplevert, en dat die waarschijnlijkheid gegeven wordt door

$$P(A_i) = \psi^*(A_i)\psi(A_i) = \langle A|A_i\rangle\langle A_i|A\rangle = |\langle A|A_i\rangle|^2$$

We noemen $P(A_i)$ de waarschijnlijkheid dat we de eigenwaarde A_i vinden. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is de waarschijnlijkheid om een deeltje op een bepaalde positie langs de x-as te vinden: $\psi^*(x_i)\psi(x_i)$. N.B. de x is hier een eigenwaarde van de positie operator (werkend op de toestandsvector $|x_i\rangle$).

5.8 De gemiddelde waarde (expectation value) van een observabele

Met het resultaat van de vorige paragraaf kunnen we de gemiddelde waarde van een observabele M vinden als we de waarschijnlijkheden $P(A_i)$ van de eigenwaarden λ_i kennen:

$$\langle M \rangle = \sum_i P(\lambda_i) \lambda_i$$

We laten de operator M werken op een toestand $|A\rangle = \sum_i a_i |\lambda_i\rangle$ die is geschreven in de (orthonormale) basis van eigenvectoren van M $|\lambda_i\rangle$ met eigenwaarden a_i

$$M|A\rangle = \sum_i a_i M|\lambda_i\rangle = \sum_i a_i \lambda_i |\lambda_i\rangle$$

Links vermenigvuldigen met $\langle A|$ geeft dan

$$\langle A|M|A\rangle = \sum_i \langle A|\lambda_i\rangle a_i \lambda_i = \sum_i a_i^* a_i \lambda_i$$

Deze formule herkennen we als

$$\langle M \rangle = \sum_i P(\lambda_i) \lambda_i$$

En dus

$$\langle M \rangle = \langle A|M|A\rangle$$

Dit is een eenvoudige uitdrukking voor de gemiddelde waarde van een observabele.

5.9 De Schrodinger vergelijking

Schrodinger equation. Begin bij p 95/7, 102. U(t) 4.2. Dan p 120 en 283

https://www.youtube.com/watch?v=mkpKR_8z6GU
[physics/0610121] How to Derive the Schrodinger Equation

De tijdoperator laat de toestanden continu evolueren in de tijd. Dat gebeurt door middel van de operator U . Deze operator zorgt er voor dat een toestand $|\Psi(t)\rangle$ evolueert van tijd stop 0 naar t :

$$|\Phi(t)\rangle = U(t)|\Phi(0)\rangle \text{ en } \langle\Psi(t)| = \langle\Psi(0)|U^\dagger(t)$$

Allereerst willen we vaststellen dat toestanden daarbij niet spontaan van de ene in de andere kunnen overgaan. Als er sprake is van 2 onderscheidbare (orthogonale) toestanden $\Psi(t)$ en $\Phi(t)$ dan geldt dat $\langle\Psi(0)|\Phi(0)\rangle = 0$. Op een willekeurig later tijdstip moet dan ook gelden dat $\langle\Psi(t)|\Phi(t)\rangle = 0$. Die eis houdt in dat U unitair moet zijn, omdat

$$\langle\Psi(t)|\Phi(t)\rangle = \langle\Psi(0)|U^\dagger(t)U(t)|\Phi(0)\rangle = 0$$

Wanneer we nu voor $|\Psi(0)\rangle$ en $|\Phi(0)\rangle$ orthogonale basisvectoren nemen moet gelden dat

$$\langle i|U^\dagger(t)U(t)|j\rangle = \delta_{ij}$$

Dan moet ook meer in het algemeen gelden

$$U^\dagger U = I$$

Het ligt voor de hand dat de tijdoperator gerelateerd is aan de energie. Immers, de energie is de behouden grootheid die gerelateerd is aan translatie in de tijd (tijdevolutie). Om een differentiaalvergelijking voor de tijdevolutie te vinden nemen we (infinitesimaal) kleine stapjes in de tijd ter grootte van ε . We kunnen de tijdoperator dan schrijven als

$$U(\varepsilon) = 1 - \varepsilon iH$$

Waarmee we een nieuwe operator, de Hamiltoniaan H hebben ingevoerd. De factor i is nodig om er voor te zorgen dat H hermitisch is. De laatste formule leidt rechtstreeks naar de tijd-afhankelijke Schrödinger vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = -iH |\Psi(t)\rangle$$

Nu moeten we alleen nog een factor $\hbar$ toevoegen om er voor te zorgen dat de dimensies kloppen:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi(t)\rangle$$

Dit is de (tijd-afhankelijke) Schrödinger vergelijking. Deze vergelijking geeft een relatie tussen de tijdevolutie van de toestand en de energie operator H , de Hamiltoniaan. De impuls operator is $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$. De hamiltoniaan operator voor de kinetische energie van een vrij deeltje $\frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$ is dan

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Dit is de (tijd-afhankelijke) Schrödinger vergelijking wordt dan

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x, t)\rangle = H |\Psi(x, t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\Psi(x, t)\rangle$$

We kunnen de Schrödinger vergelijking ook in een tijd-onafhankelijke vorm schrijven:

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

Met deze vergelijkingen kunnen we de eigenwaarden van de energie van een vrij deeltje vinden.

Toepassing op de eigenvectoren van impuls leveren dan de eigenvectoren met eigenwaarden $E = p^2/2m$. De tijd-onafhankelijke oplossing voor een vrij deeltje heeft dan de vorm

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

waarin het golfgetal $k = 2\pi/\lambda = \sqrt{2mE}/\hbar$ en $\lambda = h/p$. Veronderstel nu dat de volledige oplossing de volgende vorm heeft:

$$\Psi = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

Vul dit in in de (tijd-afhankelijke) Schrödinger vergelijking. Het linker deel wordt dan

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hbar\omega \Psi$$

En het rechter deel

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = \frac{\hbar}{2m} k^2 \Psi$$

Daaruit volgt:

$$\hbar \omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 = E$$

De oplossing voor een vrij deeltje heeft dus de vorm:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

met $E = \hbar \omega$

5.10 De Born regel voor de waarschijnlijkheid

De intensiteit van EM straling is evenredig met het kwadraat van de sterkte van het elektrisch veld. De intensiteit is dus een maat voor de waarschijnlijkheid om een foton aan te treffen. In de quantummechanica is de waarschijnlijkheid om een foton aan te treffen evenredig met het kwadraat van de golffunctie. Dat is de Born regel. Die regel geldt ook veel algemener. Het kwadraat van de (complexe) golffunctie – bijv. $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$ is een maat voor de waarschijnlijkheid om een deeltje in x aan te treffen. Die regel kan uit de Schrödinger vergelijking afgeleid worden. Die vergelijking leidt tot een behoudswet voor waarschijnlijkheid in de vorm van een continuïteitsvergelijking voor de waarschijnlijkheidsdichtheid $\rho = |\psi(r, t)|^2$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J(r, t) = 0$$

Deze vergelijking zegt dat de verandering van waarschijnlijkheidsdichtheid wordt gecompenseerd door de gradiënt van de stroom van de waarschijnlijkheidsdichtheid gedefinieerd door

$$J(r, t) = \frac{\hbar}{2im} [\psi^*(r, t) \nabla \psi(r, t) - \psi \nabla \psi^*(r, t)]$$

Je kunt dit afleiden uit de Schrödinger vergelijking

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(r, t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta |\Psi(r, t)\rangle + V(r, t) |\Psi(r, t)\rangle$$

Vermenigvuldigen van deze vergelijking met $\langle \Psi(r, t) |$ en de complex geconjugeerde van bovenstaande vergelijking met $|\Psi(r, t)\rangle$. Dit levert 2 vergelijkingen die van elkaar afgetrokken de bovenstaande continuïteitsvergelijking oplevert. Deze wet van behoud van waarschijnlijkheid is algemener dan de klassieke continuïteitsvergelijkingen.

5.11 Positie en impuls operatoren

Hoe beschrijven de positie en de snelheid van een deeltje (of foton). We kunnen de operatoren van positie en impuls gebruiken om de eigentoestanden van die operatoren te vinden. Positie en impuls hebben niet dezelfde eigenvectoren, want de operatoren commuteren niet (zie [5.5](#)).

We kunnen de toestandsvector dus wel schrijven in een basis van positie eigenvectoren of impuls eigenvectoren, maar niet in een basis van beide operatoren. Dus

$$|\Psi\rangle = \psi(x)|x\rangle, \quad \text{of} \quad |\Psi\rangle = \psi(p)|p\rangle, \quad \text{maar niet} \quad |\Psi\rangle = \psi(x,p)|x,p\rangle$$

(N.B. de uitdrukking $\psi(x)|x\rangle$ moet gelezen worden als een som over matrixelementen van de positievector, of als een integraal over posities). Hoe destilleren we nu grootheden zoals positie en impuls. Dat doen we door bewerkingen (operaties) uit te voeren op de toestandsvector. We zoeken operatoren die overeenkomen met de positie of met de snelheid (of de spin, e.d.). Kets houden zich aan de wetten van lineariteit. Dat willen we zo houden. We zoeken dus “lineaire operatoren”. Bovendien moeten de operatoren Hermitisch zijn, zodat ze - bij werking op de toestandsvectoren - reëel getallen opleveren.

Positie operator

De eerste is de positie operator $\mathbf{X}$. Deze operator komt overeen met vermenigvuldiging, d.w.z $\mathbf{X}|\Psi\rangle = x|\Psi\rangle$. Voor de eigenfuncties moet dan gelden:

$$\mathbf{X}\psi(x) = x\psi(x) = x_0\psi(x)$$

met eigenwaarde x_0 . De eigenfuncties voldoen daarmee aan de definitie van Dirac's delta functie:

$$\psi(x) = \delta(x - x_0).$$

Het is niet moeilijk te laten zien dat de operator Hermitisch is, en dus reële eigenwaarden (de positie) oplevert.

Het inproduct van een willekeurige toestand $|\Psi\rangle$ en de positie eigentoestand $|x_0\rangle$ is

$$\langle x_0|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \psi(x) dx = \psi(x_0)$$

Dit geldt voor iedere x_0 . Daarom geldt voor iedere x

$$\langle x|\Psi\rangle = \psi(x)$$

Dit is de *golffunctie in de x-representatie, ofwel de projectie van de toestandsvector op de eigenvectoren van de positie operator.*

Impuls operator

De volgende operator komt overeen met differentiatie. Die operator blijkt overeen te komen met de impuls operator $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

Dit is ook een lineaire operator, maar er kloppen twee zaken niet aan. 1) de dimensie komt niet overeen met impuls, en 2) hij levert geen reële eigenwaarden op. Om dat te repareren voegen we 1) de Planck constante h toe en 2) het imaginaire getal i . De definitie wordt dan

$$\mathbf{P}\psi(x) = -ih \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

Het is niet moeilijk om de eigenfuncties van deze operator te vinden, er moet immers gelden $P\psi(x) = p\psi(x)$, waarin p de eigenwaarde is. De oplossing van deze vergelijking is

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

De factor $1/\sqrt{2\pi}$ is toegevoegd vanwege de normering van de golffunctie.

Er is een fraai wiskundig verband tussen de inproducten van eigenvectoren van de positie en de impuls $|x\rangle$ en $|p\rangle$:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

N.B. De golflengte van de positie eigenfuncties verandert niet als we $\lambda = \frac{h}{p}$ optellen bij x .

We gaan uit van de abstractie toestandsvector $|\Psi\rangle$. Hoe vinden we nu de golffunctie in de “positie representatie” $\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$, en de golffunctie in de “impuls representatie” $\psi(p) = \langle p|\Psi\rangle$. Daarvoor maken we gebruik van de identiteits operator

$$I = \int dx \langle x|x\rangle = \int dp \langle p|p\rangle$$

$$\psi(p) = \langle p|\Psi\rangle = \langle p|I|\Psi\rangle = \int dp \langle p|x\rangle \langle x|\Psi\rangle =$$

Invullen van $\langle p|x\rangle$:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{\frac{-ipx}{\hbar}} \psi(x)$$

Op dezelfde manier vinden we voor

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{\frac{ipx}{\hbar}} \psi(p)$$

De golffuncties zijn elkaar's Fourier transformaties.

Spin operator ([zie hfdst 6](#))

5.12 Onzekerheidsrelatie

Allereerst moeten we vaststellen dat de twee operatoren $\mathbf{X}$ en $\mathbf{P}$ niet commuteren, d.w.z. $\mathbf{XP}$ en $\mathbf{PX}$ niet hetzelfde opleveren. De commutator van de twee operatoren, $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = (\mathbf{XP} - \mathbf{PX})$ is niet gelijk aan 0.

$$(\mathbf{XP} - \mathbf{PX})\psi(x) \neq 0$$

Je kunt snel inzien dat

$$[X, P]\psi(x) = i \frac{h}{2\pi} = i\hbar$$

Hiermee kunnen we de onzekerheidsrelatie afleiden (Susskind 5.8 en 8.5)

We beginnen met de Cauchy-Schwarz ongelijkheid voor een willekeurige driehoek die is opgebouwd uit de drie vectoren $\vec{X}$, $\vec{Y}$ en $\vec{Z}$, waarbij $\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$. Dan is $|\vec{X}| + |\vec{Y}| \geq |\vec{Z}| = |\vec{X} + \vec{Y}|$. Kwadrateren van deze vergelijking levert voor het rechter lid is gelijk aan $|\vec{X}|^2 + |\vec{Y}|^2 + 2(\vec{X} \cdot \vec{Y})$. De vergelijking wordt dan $|\vec{X}||\vec{Y}| \geq \vec{X} \cdot \vec{Y} = |\vec{X}||\vec{Y}| \cos \vartheta$, waarmee duidelijk wordt dat

$$2|\vec{X}|^2 |\vec{Y}|^2 \geq |\vec{X} \cdot \vec{Y}|^2$$

Dit is de Cauchy-Schwarz ongelijkheid. Wanneer we $\vec{X}$, $\vec{Y}$ en $\vec{Z}$ nu opvatten als toestandsvectoren kunnen we $|\vec{X}|$ en $|\vec{Y}|$ schrijven als de verwachtingswaarde $|\vec{X}| = \sqrt{\langle X|X \rangle}$ en $|\vec{Y}| = \sqrt{\langle Y|Y \rangle}$, en $|\vec{X} + \vec{Y}| = \sqrt{(\langle X| + \langle Y|)(|X\rangle + |Y\rangle)}$. Ook nu geldt weer dat

$$|\vec{X}| + |\vec{Y}| \geq |\vec{X} + \vec{Y}|$$

Als we deze vergelijking weer kwadrateren en vereenvoudigen vinden we opnieuw een Cauchy-Schwarz ongelijkheid:

$$2|\vec{X}||\vec{Y}| \geq |\langle X|Y \rangle + \langle Y|X \rangle|$$

Nu definiëren we $|X\rangle = A|\Psi\rangle$, en $|Y\rangle = iB|\Psi\rangle$. Invullen in de laatste vergelijking:

$$|\vec{X}| = \sqrt{\langle X|X \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle},$$

En dan invullen in bovenstaande vergelijking geeft

$$2\sqrt{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle} \geq |\langle \Psi|AB|\Psi \rangle - \langle \Psi|BA|\Psi \rangle| = |\langle \Psi|[AB]|\Psi \rangle|$$

We herkennen in het rechter lid de commutator van A en B, $[AB]=AB-BA$. Nu is $\langle A^2 \rangle$ gelijk aan de onzekerheid in A: $\langle A^2 \rangle = (\Delta A)^2$. Zo vinden we de onzekerheidsrelatie

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \Psi|[AB]|\Psi \rangle|$$

Wanneer we deze regel toepassen op de operatoren X en P vinden we de bekende onzekerheidsrelatie voor de positie en de impuls van een deeltje:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} |i\hbar \langle \Psi|\Psi \rangle| = \frac{1}{2} \hbar$$

5.13 Spin toestandsvectoren.

De spin toestand is de meest eenvoudige toestand van een deeltje, omdat het resultaat van een spin meting altijd alleen maar $\uparrow$ of $\downarrow$ kan zijn (vermenigvuldigd met $\hbar/2$, zie het Stern-Gerlach experiment). Je kunt die waarden verschillende namen geven afhankelijk van de

richting waarin je meting doet, bijv. up of down (u of d) wanneer je in de z -richting meet, left of right (l of r) in de x -richting, en in of out (i of o) in de y -richting. Die spinwaarden in de ruimte worden ook wel quantum bits genoemd, of **qubits**. De spin vector is dus 2-dimensionaal

$$\sigma_z = |up\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \sigma_z = |down\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit zijn de kets voor de spin in de z -richting. Toestandsvectoren (zoals de kets) kunnen een complexe component hebben. We zullen zien dat dat ook voor de spin kets geldt.

De toestandsvector van een deeltje met onbekende spin kan geschreven worden als

$$|\Psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle$$

waarin $\alpha = \langle u|\Psi\rangle$ en $\beta = \langle d|\Psi\rangle$. Wanneer je de spin in de z -richting (up en down) meet bepalen de “golffunctie producten” $\alpha^*\alpha = \langle\Psi|u\rangle\langle u|\Psi\rangle$ en $\beta^*\beta = \langle\Psi|d\rangle\langle d|\Psi\rangle$ de waarschijnlijkheid dat het deeltje spin up resp. spin down zal hebben.

5.14 Beschrijving van spin in de QM

We zoeken nu naar een beschrijving van de spin van deeltjes die in overeenstemming is met het Stern-Gerlach experiment. Dat experiment leert ons dat de spin toestand de meest eenvoudige toestand van een deeltje is, omdat het resultaat van een spin meting altijd alleen maar $\uparrow$ of $\downarrow$ kan zijn. Je kunt die waarden verschillende namen geven afhankelijk van de richting waarin je meting doet, bijv. up of down (u of d) wanneer je in de z -richting meet, left of right (l of r) in de x -richting, en in of out (i of o) in de y -richting. Die spinwaarden in de ruimte worden ook wel quantum bits genoemd, of **qubits**. De spin vector is dus 2-dimensionaal. Je kunt ook zeggen “De Hilbertruimte van de spin heeft maar 2 dimensies”. Er zijn dus slechts 2 basisvectoren. Voor een meting in de z -richting kun je kiezen

$$\sigma_z = up = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \sigma_z = down = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wat zijn de toestandsvectoren van de spin van een deeltje. Het SG experiment leert ons dat een spin meting altijd een $\uparrow$ of $\downarrow$ oplevert, onafhankelijk van de oriëntatie van het apparaat. Als het deeltje tevoren in een bepaalde richting geprepareerd is zal het bij een volgende meting (in dezelfde richting) hetzelfde resultaat geven. Als de richting van het apparaat wordt gewijzigd zal het resultaat bij de volgende meting met een bepaalde waarschijnlijkheid $\uparrow$ of $\downarrow$ zijn. Dit is een belangrijk verschil met klassieke mechanica. In de klassieke mechanica kun je het gedrag van een deeltje (deterministisch) voorspellen als je de toestand van het deeltje kent. In de quantummechanica wordt de evolutie van de golffunctie deterministisch beschreven (door de Schrödinger vergelijking Susskind, Hfds. 4), maar bereken je met de golffunctie slechts de waarschijnlijkheid van een mogelijke uitkomst van een meting.

Wanneer we de (onbekende) spin van een deeltje in de z -richting meten kunnen we de toestandsvector (ket) schrijven als een combinatie van de 2 (orthogonale) basisvectoren in die richting

$$|\Psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle$$

Deze basisvectoren zijn orthogonaal, dat wil zeggen dat $\langle d|u\rangle = \langle u|d\rangle = 0$. Je kunt dan eenvoudig laten zien dat $\alpha = \langle u|\Psi\rangle$, en $\beta = \langle d|\Psi\rangle$.

Iedere spin toestand kan beschreven worden als een lineaire combinatie van de basisvectoren $|u\rangle$ en $|d\rangle$. Wat kunnen we nu zeggen over de vectoren in de x-richting (x_- of x_+ , of $|l\rangle$ en $|r\rangle$). Het Gern-Sternlach experiment leert ons dat deeltjes die in de x_+ - richting wijzen gelijke kansen hebben om spin $\uparrow$ of $\downarrow$ te geven wanneer het apparaat in de z-richting wordt georiënteerd. Dat houdt in dat $\alpha^*\alpha = \beta^*\beta = 1/2$. α en β zullen dus gelijk zijn. De toestandsvector voor rechts zal dus de volgende vorm moeten hebben

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

Voor de vector $|l\rangle$ zijn de waarschijnlijkheden voor up en down ook weer 50%. We schrijven $|l\rangle$ als

$$|l\rangle = \gamma|u\rangle + \delta|d\rangle$$

We weten ook dat

$$\langle r|l\rangle = \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = 0$$

en

$$\langle l|r\rangle = \alpha^*\gamma + \beta^*\delta = 0,$$

waarmee we vinden dat $\gamma^* = -\delta^*$ en $\gamma = -\delta$. Bovendien moet gelden: $\gamma^*\gamma + \delta^*\delta = 1$ en dus (samenvattend)

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenslotte de vectoren langs de y-as (in en uit het z-vlak):

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \kappa|u\rangle + \lambda|d\rangle \\ |i\rangle &= \mu|u\rangle + \nu|d\rangle \end{aligned}$$

Er geldt weer $\langle i|0\rangle = \langle 0|i\rangle = 0$.

Verder weten we van de Stern-Gerlach experimenten dat als de spin langs de y-as is georiënteerd en langs de z-as wordt gemeten de kans dat de spin up of down is weer 1/2 is, d.w.z. $\kappa\kappa^* = \lambda\lambda^* = \mu\mu^* = \nu\nu^* = 1/2$. Wanneer de spin langs de x-as gemeten wordt is de kans dat de spin links of rechts is ook 1/2. Dat betekent dat

$$\langle o|r\rangle\langle r|0\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle o|l\rangle\langle l|0\rangle = \frac{1}{2}$$

En ook

$$\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle i|l\rangle\langle l|i\rangle = \frac{1}{2}$$

Uitwerken van de eerste twee vergelijkingen levert de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\kappa^* + \lambda^*)(\kappa + \lambda) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\kappa^* - \lambda^*)(\kappa - \lambda) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Als we de vergelijkingen van elkaar aftrekken vinden we dat $\kappa\lambda^* + \kappa^*\lambda = 0$. Samen met $\kappa\kappa^* = \lambda\lambda^* = 1/2$ vinden we dan dat $\kappa^2 + \lambda^2 = 0$ en dus dat $\kappa = \pm i\lambda$, of $\lambda = \pm i\kappa$. We vinden dus voor de kets in de in en out richting:

$$\begin{aligned}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle \\ |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle\end{aligned}$$

Vaak komt de vraag op of het gebruik van imaginaire getallen in de quantummechanica wel noodzakelijk is. Immers je kunt een de vergelijking $z_1 = z_2$ altijd schrijven als 2 vergelijkingen: 1 voor het reële deel, $Re(z_1) = Re(z_2)$, en 1 voor het imaginaire deel, $Im(z_1) = Im(z_2)$. Toch kun je laten zien dat κ en λ niet beide reëel kunnen zijn, immers, als $\kappa\lambda^* + \kappa^*\lambda = \kappa\lambda^* + (\kappa\lambda^*)^* = 0$ dan moet $\kappa\lambda^*$ een zuiver imaginair getal zijn en dat betekent dat κ en λ niet beide reëel kunnen zijn. Imaginaire getallen zijn dus nodig om de Stern-Gerlach experimenten te verklaren.

We kunnen nu er voor kiezen dat κ reel is. Aangezien $\kappa\kappa^* = 1/2$ volgt dan dat $\kappa = 1/\sqrt{2}$ en $\lambda = \pm i/\sqrt{2}$. We hebben de vrijheid om het + teken te kiezen. Voor het tweede stel vergelijking hierboven ($\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle$ en $\langle i|l\rangle\langle r|l\rangle$) kunnen we dezelfde afleiding doen hierboven.

(Zie ook Sakurai 3.2 p. 161 en 167 over rotatie operator. Rotatie over 2π leidt tot spinflip van $\uparrow$ naar $\downarrow$. Je moet dus 2x roteren over 2π om terug te gaan naar $\uparrow$)

6. De Spin operatoren

Hoe bepalen we de spin van een deeltje in een bepaalde richting (x , y of z)? De klassieke spin is een 3-vector, maar de quantummechanische spin is een 2-vector (in een twee dimensionale Hilbert ruimte). We zoeken een operator die op de spin kets werkt met als resultaat: de spin in één van de drie richtingen. Suskind noemt dat een 3-vector operator: σ_x , σ_y , en σ_z . Stel dat we het SG apparaat in de z -richting hebben georiënteerd. We meten dan $\uparrow$ of $\downarrow$, de eigenwaarden van de (orthogonale) kets $|u\rangle$ of $|d\rangle$:

$$\begin{aligned}\sigma_z|u\rangle &= |u\rangle \\ \sigma_z|d\rangle &= -|d\rangle\end{aligned}$$

In matrix vorm schrijven we dit als

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

De oplossing van deze 2 vergelijkingen is

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We kunnen nu verder gaan en σ_x uitrekenen. We kennen de eigenvectoren van deze operator, nl. $|r\rangle$ en $|l\rangle$ met bijbehorende eigenwaarden $+1$ en -1 . De eigenfuncties van de spin operator in de x -richting zijn

$$\sigma_x|r\rangle = |r\rangle$$

$$\sigma_x|l\rangle = -|l\rangle$$

Met de vergelijkingen voor $|r\rangle$ en $|l\rangle$ uitgedrukt in de $|u\rangle$ en $|d\rangle$ vectoren vinden we

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hiermee kunnen we nu de vorige 2 vergelijkingen in matrixvorm schrijven

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^{11} & \sigma_x^{12} \\ \sigma_x^{21} & \sigma_x^{22} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^{11} & \sigma_x^{12} \\ \sigma_x^{21} & \sigma_x^{22} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Met als oplossing

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenslotte doen we hetzelfde voor metingen in de y -richting met als resultaat

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

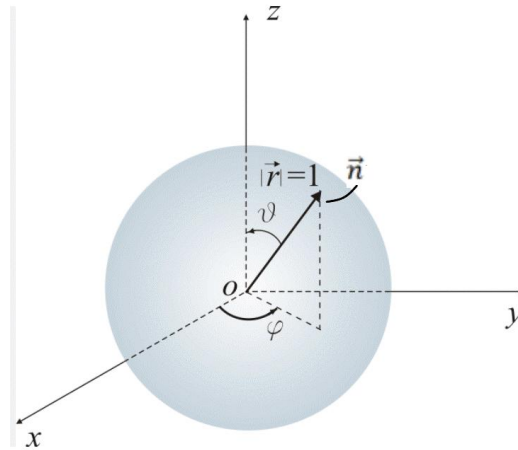
Deze spinoperatoren noemen we de Pauli operatoren. Tot nu toe hebben we de spin operatoren laten werken op de bijbehorende eigentoestanden. Dat levert uiteraard een eigentoestand op. Je kunt σ_z ook op een geprepareerde toestand laten werken die geen eigentoestand van die operator is, bijv $|r\rangle$. Het resultaat is dan

$$\sigma_z|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z|d\rangle = \sigma_z|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |d\rangle$$

Het resultaat van de meting is dan $\uparrow$ (toestand $|u\rangle$) of $\downarrow$ (toestand $|d\rangle$).

(N.B. zo'n 3-vector operator is iets anders dan een toestandsvector. Het is ook geen klassieke vector in de ruimte)

Nu oriënteren we het SG apparaat in een willekeurige richting $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$.



De spin operator in die richting berekenen we door het inproduct van $\vec{\sigma}$ met $\vec{n}$ te nemen.

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$$

In matrix vorm:

$$= n_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + n_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu moeten we nog de eigenfuncties en eigenwaarden van deze operator berekenen. Wanneer we $\vec{n}$ in het $x - z$ vlak leggen (en $\vec{n}$ maakt een hoek θ met de z -as) geldt:

$$n_z = \cos \theta, \quad n_x = \sin \theta, \quad \text{en } n_y = 0$$

Daarmee wordt

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Nu willen we de eigenfuncties (en bijbehorende eigenwaarden) van deze operator vinden. Daarmee kunnen we de kans berekenen dat we bij meting van de spin in een bepaalde richting (hoek θ ten opzichte van het SG apparaat) een $+$ of een $-$ vinden. Het blijkt heel handig te zijn om te veronderstellen dat de eigenvectoren de vorm $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ hebben met eigenwaarden λ . We zoeken dus naar de oplossing van

$$\sigma_n \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Dit levert:

$$\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = \lambda \cos \alpha$$

$$\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha = \lambda \sin \alpha$$

Het linker lid van de eerste vergelijking is gelijk aan $\cos(\theta - \alpha)$. Het linker lid van de tweede is gelijk aan $\sin(\theta - \alpha)$. We hebben dus nu de twee vergelijkingen

$$\cos(\theta - \alpha) = \lambda \cos \alpha$$

$$\sin(\theta - \alpha) = \lambda \sin \alpha$$

Deze vergelijkingen hebben 2 mogelijke oplossingen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \text{met} \quad \cos(\theta - \alpha) = \cos \alpha, \text{ zodat } \alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \text{met} \quad \cos(\theta - \alpha) = -\sin \alpha = \cos \alpha + \pi, \quad \text{zodat } \alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Samenvattend hebben we de volgende twee eigenfuncties voor

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \text{ met } \lambda_1 = 1, \quad \text{en} \quad |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \text{ met } \lambda_2 = -1$$

Als we nu het SG apparaat in de z-richting oriënteren en we selecteren de deeltjes met spin $|u\rangle$ en vervolgens laten we die deeltjes door een SG apparaat gaan dat georiënteerd is langs $\vec{n}$ dan is de waarschijnlijkheid dat we een deeltje met $\sigma_n = +1$ vinden gelijk aan

$$P(+1) = |\langle u | \lambda_1 \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

En voor spin $|d\rangle$

$$P(-1) = |\langle u | \lambda_2 \rangle|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

De gemiddelde waarde van de spin in de $\vec{n}$ richting kun je berekenen met

$$\langle \sigma_n \rangle = (+1) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (-1) \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$$

Dit is precies wat we in het SG experiment vonden.

7. Entanglement

7.1 Alice en Bob (A en B)

Alice en Bob hebben allebei een munt met Kop aan de ene kant en Munt aan de andere kant. De munten zijn identiek. Ze gooien de munt op en lezen het resultaat. Als die dobbelstenen identiek zijn en volkomen onafhankelijk van elkaar leven zegt de klassieke waarschijnlijkheidsleer dat de kans dat ze beide een +1 gooien gelijk is aan $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Dat geldt ook voor de spin van 2 deeltjes die onafhankelijk van elkaar gemeten worden. A en B hebben allebei een deeltje dat spin $\uparrow$ of $\downarrow$ heeft. De spintoestand van A noemen we $|A\rangle$ en die van B noemen we $|B\rangle$. De spin van A en B kunnen zich ook in superpositie toestanden bevinden:

$$|A\rangle = \alpha_{\uparrow} |\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow} |\downarrow\rangle, \quad \text{en} \quad |B\rangle = \beta_{\uparrow} |\uparrow\rangle + \beta_{\downarrow} |\downarrow\rangle$$

De waarschijnlijkheid dat de spin van A de waarde $\uparrow$ heeft noemen we $P_A(\uparrow)$ en die van B $P_B(\uparrow)$. Met de normeringen

$$\alpha_{\uparrow}^* \alpha_{\uparrow} + \alpha_{\downarrow}^* \alpha_{\downarrow} = P_A(\uparrow) + P_A(\downarrow) = 1$$

$$\beta_{\uparrow}^* \beta_{\uparrow} + \beta_{\downarrow}^* \beta_{\downarrow} = P_B(\uparrow) + P_B(\downarrow) = 1$$

Vinden we dan dat $\alpha_{\uparrow} = \alpha_{\downarrow} = 1/\sqrt{2}$, omdat $P_A(\uparrow) = P_A(\downarrow)$. Hetzelfde geldt voor B. Dat houdt in dat de waarschijnlijkheid dat in systeem A+B de spin up of down is onafhankelijk is van de spin van B. Als de twee waarschijnlijkheden niet gecorreleerd zijn geldt voor de gecombineerde waarschijnlijkheid

$$P(\uparrow, \uparrow) = P_A(\uparrow) P_B(\uparrow), \quad P(\uparrow, \downarrow) = P_A(\uparrow) P_B(\downarrow), \quad \text{enz.}$$

Als je wilt testen of er een correlatie bestaat tussen de waarden die A vindt en de waarden die B vindt, dan bereken je in het algemeen de ‘‘Covariantie $C(a,b)$ ’’. De covariantie wordt berekend uit de gemiddelde waarden (of Expectation values) van a en b .

$$C(a, b) = E(ab) - E(a)E(b)$$

A en B gooien beide onafhankelijk van elkaar een identieke dobbelsteen. Ze gooien beide 100x en vergelijken de lijsten met hun resultaten. Als hoge waarden van A overeenkomen met hoge waarden van B zal $E(ab)$ in het algemeen hoger zijn dan $E(a)E(b)$. $C(a, b)$ is dan positief. Als hoge waarden van A overeenkomen met lage waarden van B zal $C(a, b)$ in het algemeen negatief zijn. Je kunt ook aan de hand van de voorlaatste vergelijking laten zien dat $C(a, b)$ gelijk aan 0 is wanneer de resultaten van A en B onafhankelijk van elkaar zijn. Immers $E(a)$ is niets anders dan

$$E(a) = \sum_{i=1 \dots N} a_i P(a_i)$$

$$E(a)E(b) = \sum_{i=1 \dots N} a_i P(a_i) \sum_{i=1 \dots N} b_i P(b_i) = \sum_{i=1 \dots N} \sum_{i=1 \dots N} a_i b_i P(a_i) P(b_i) = E(ab),$$

en dus is $C(a, b)$ gelijk aan 0.

We hebben het tot nu toe over twee aparte systemen ($S(A)$ en $S(B)$), maar we proberen onze beschrijving uit te breiden naar een beschrijving van het gecombineerde systeem $S(AB)$. Dat gecombineerde systeem bevat zowel de toestandsvectoren (kets) van A als die van B. Als de ket van A een N_A dimensionale vector is, en die van B N_B dimensionaal, dan is de ket vector voor het gecombineerde systeem $N_A N_B$ dimensionaal. De kets van het gecombineerde systeem $S(AB)$ schrijven we als

$$|AB\rangle$$

Zo kunnen we de basiskets voor de combinatie van A en B schrijven als $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$. en $|\downarrow\downarrow\rangle$, of $|uu\rangle, |ud\rangle, |du\rangle$. en $|dd\rangle$, **waarin de het linker symbool steeds hoort bij A en het rechter bij B**. De combinatie $|AB\rangle$ is een voorbeeld van een **tensor product**. In [10.4](#) wordt dit product verder uitgelegd.

Wanneer we op die manier een combinatie maken van de hierboven staande superpositie toestanden van A en B wordt dat

$$|AB\rangle = (\alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle) \otimes (\beta_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \beta_{\downarrow}|\downarrow\rangle)$$

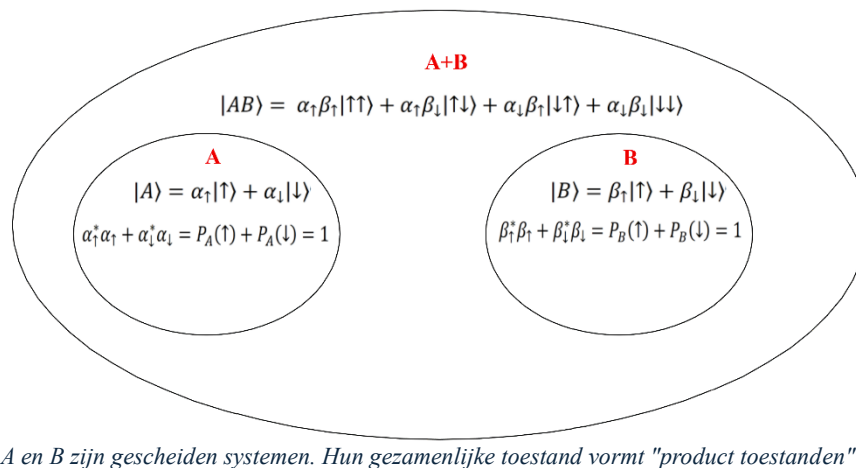
We noemen dit een tensor product. We zullen het tensorproduct symbool hierna weglaten. Uitwerken van het product levert

$$|AB\rangle = \alpha_{\uparrow}\beta_{\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_{\uparrow}\beta_{\downarrow}|\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_{\downarrow}\beta_{\uparrow}|\downarrow\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}\beta_{\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle$$

Zo zijn er 4 kets in $S(AB)$ voor de spintoestanden wanneer deze gemeten worden langs de z-as

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$$

Hierbij moeten we er wel rekening mee houden dat de eerste pijl in een andere ruimte leeft dan de tweede. De eerste pijl hoort bij A en de tweede bij B. Ook deze kets kunnen – net als de kets van de afzonderlijke systemen - in superpositie toestanden voorkomen. De toestand $|AB\rangle$ noemen we een “product toestand”. Dergelijke toestanden beschrijven systemen die onafhankelijk van elkaar bestaan. De normering van de kets is daarbij erg belangrijk. Die garandeert dat de waarschijnlijkheden zich klassiek gedragen. Als A en B beide een groot aantal malen een identieke dobbelsteen gooien zullen hun resultaten geen enkele correlatie vertonen.



7.2 In Product toestanden is er geen correlatie tussen de spins.

$$\langle \sigma_z \tau_z \rangle - \langle \sigma_z \rangle \langle \tau_z \rangle = 0$$

We nemen een algemene product toestand:

$$|\sigma_A \sigma_B\rangle = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \otimes (c|\uparrow\rangle + d|\downarrow\rangle) = ac|\uparrow\uparrow\rangle + ad|\uparrow\downarrow\rangle + bc|\downarrow\uparrow\rangle + bd|\downarrow\downarrow\rangle$$

met normalisatie

$$[a]^2 + [b]^2 = 1 \quad \text{en} \quad [c]^2 + [d]^2 = 1$$

De eigenwaarden van $|\sigma_A \sigma_B\rangle$ op de basis vectoren $|uu\rangle, |ud\rangle, |du\rangle$ en $|dd\rangle$ zijn resp. +1, -1, -1, en +1. Daarmee vinden we voor de verwachtingswaarde

$$\langle \sigma_z \tau_z \rangle = +[ac]^2 - [ad]^2 - [bc]^2 + [bd]^2 = ([a]^2 - [b]^2)([c]^2 - [d]^2)$$

De verwachtingswaarde voor σ_z is

$$\langle \sigma_z \rangle = [ac]^2 + [ad]^2 - [bc]^2 - [bd]^2 = ([a]^2 - [b]^2)([c]^2 + [d]^2) = [a]^2 - [b]^2$$

En op dezelfde manier voor $\langle \tau_z \rangle$

$$\langle \tau_z \rangle = [c]^2 - [d]^2$$

We zien dan dat $\langle \sigma_z \tau_z \rangle - \langle \sigma_z \rangle \langle \tau_z \rangle = 0$. Er is dus geen enkele correlatie tussen de spins van A en B. In de volgende paragraaf zien we de correlatie in de verstrengelde “singlet state” maximaal is.

7.3 Polarisatie principe

In Product toestanden kunnen A en B altijd een richting vinden waarin de spin +1 is. Dit wordt wel het Spin polarisatie principe genoemd. Laten we die richting $\vec{n}$ noemen. Als $|A\rangle = \alpha_u |\uparrow\rangle + \alpha_d |\downarrow\rangle$ een eigenfunctie van de operator $\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ is dan geldt:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} |A\rangle = |A\rangle$$

met de eigenwaarde +1. Dan moet gelden dat de verwachtingswaarde voor deze operator gelijk is aan

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \rangle = \langle A | \vec{\sigma} \cdot \vec{n} | A \rangle = 1$$

Maar de verwachtingswaarden voor de richtingen loodrecht op $\vec{n}$ zijn 0. Daarom moet gelden dat

$$\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 = 1$$

7.4 Verstrengeling

In de quantummechanica bestaan er meer algemene toestandsvector voor het gecombineerde systeem van A en B. Een algemene toestandsvector kan geschreven worden als

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b} \psi(a,b) |ab\rangle$$

Of voor het systeem A en B

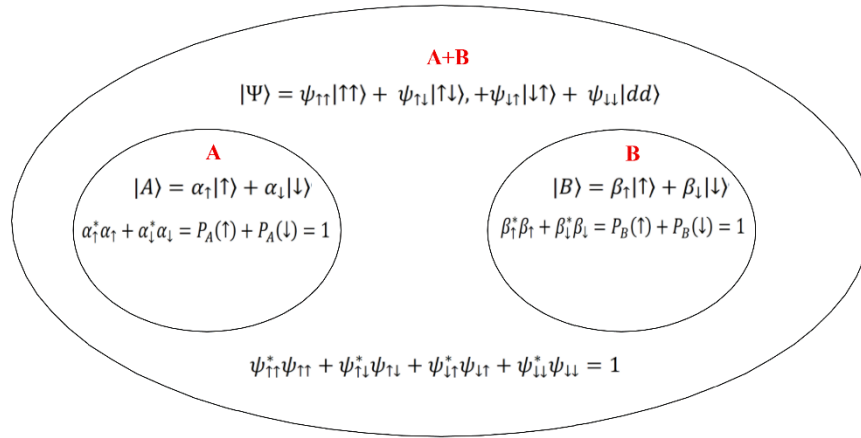
$$|\Psi\rangle = \psi_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\uparrow\rangle + \psi_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\downarrow\rangle + \psi_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\uparrow\rangle + \psi_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\downarrow\rangle$$

Met de normering

$$\psi_{\uparrow\uparrow}^* \psi_{\uparrow\uparrow} + \psi_{\uparrow\downarrow}^* \psi_{\uparrow\downarrow} + \psi_{\downarrow\uparrow}^* \psi_{\downarrow\uparrow} + \psi_{\downarrow\downarrow}^* \psi_{\downarrow\downarrow} = 1$$

Deze normering laat meer mogelijkheden toe voor de coëfficiënten van $|\Psi\rangle$ dan voor de coëfficiënten van klassieke product toestanden. Daarmee ontstaan nieuwe toestanden die niet te schrijven zijn als product toestanden zoals hierboven beschreven. Deze zgn.

“verstrengelde” toestanden zijn nieuw, en anders dan wat we in de klassieke mechanica gewend zijn.



Een voorbeeld van zo’n verstrengelde toestand is de zgn. “singlet” toestand:

$$|\Psi_{singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Een vergelijking met de product state in 7.2 laat zien dat dit geen product state kan zijn. Als A een spin meting doet dan werkt de spin operator (σ_z , σ_x , en σ_y) op de eerste pijl in $|\uparrow\downarrow\rangle$. De werking van de operatoren kennen we uit het hoofdstuk over spin operatoren. Daarmee vinden we

$$\sigma_z|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \text{ en } \sigma_z|\downarrow\uparrow\rangle = -|\downarrow\uparrow\rangle, \quad \text{enz.}$$

De operatoren van B noemen we (τ_z , τ_x , en τ_y). B’s operatoren werken alleen op de tweede pijl, dus

$$\tau_z|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \text{ en } \tau_z|\uparrow\downarrow\rangle = -|\uparrow\downarrow\rangle, \quad \text{enz}$$

We kunnen nu enkele eigenschappen van verstrengelde toestanden zoals de singlet state nader onderzoeken. Voor de klassieke “product states” van A en B geldt dat A en B allebei een richting kunnen vinden waarin hun de spin van een deeltje gelijk is aan +1 of -1. De verwachtingswaarden voor de spinoperatoren voldoen aan

$$\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2 = 1$$

Dat is niet het geval voor verstrengelde toestanden zoals de singlet toestand. De verwachtingswaarde is

$$\begin{aligned} \langle\sigma_z\rangle &= \langle\Psi_{singlet}|\sigma_z|\Psi_{singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\Psi_{singlet}|\sigma_z(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \\ \langle\sigma_z\rangle &= \frac{1}{2}(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|)(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = 0 \end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor $\langle \sigma_x \rangle$ en $\langle \sigma_y \rangle$. Dat is duidelijk in strijd met de uitdrukking die we hierboven vonden voor product states: $\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 = 1$. De verwachtingswaarde voor de spincomponenten is 0. Dat betekent dat de uitkomsten van de spinmetingen van A en B volledig onbekend (ongedetermineerd) zijn. We hebben dus een toestand van het gecombineerde systeem van A en B die we wiskundig precies kennen, maar waarvan we de resultaten van de spinmetingen niet kennen. Er lijkt iets te ontbreken. Hier ontstaat de vraag of de theorie wel compleet is. Zijn er misschien onderliggende variabelen in het spel die we niet kennen?

P232. We kunnen het verschil tussen een product toestand en een verstrengelde toestand ook uitdrukken in de covariantie tussen spinmetingen van A (σ_z, σ_x , en σ_y) en B (τ_z, τ_x , en τ_y). We hebben gezien dat er geen correlatie is tussen de spinresultaten van A en B in een product toestand. Dat blijkt ook uit het gegeven dat in A en B gelden

$$\begin{aligned}\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 &= 1 \\ \langle \tau_x \rangle^2 + \langle \tau_y \rangle^2 + \langle \tau_z \rangle^2 &= 1\end{aligned}$$

Voor de singlet toestand vinden we $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = \langle \tau_x \rangle = \langle \tau_y \rangle = \langle \tau_z \rangle = 0$. Er is dus geen richting bekend waarin de spin + of -1 is zoals in het geval van product toestanden. Voor product toestanden wordt de correlatie voor de metingen in de z-richting gegeven door $\langle \sigma_z \tau_z \rangle - \langle \sigma_z \rangle \langle \tau_z \rangle = 0$. Er blijkt wel een sterke correlatie te zijn tussen de spinmetingen in de singlet toestand. Voor die toestanden levert de berekening van de eerste term in het linker lid $\langle \sigma_z \tau_z \rangle = \langle \sigma_x \tau_x \rangle = \langle \sigma_y \tau_y \rangle = \langle \sigma_z \tau_z \rangle = -1$. Het tweede lid is gelijk aan 0. De covariantie wordt

$$\langle \sigma_z \tau_z \rangle - \langle \sigma_z \rangle \langle \tau_z \rangle = -1$$

In de singlet toestand is er dus een sterke correlatie tussen de metingen van A en B van een singlet state.

Zie ook Sakurai p225/6

8. Entanglement (en Quantum computing)

A en B ontvangen beide N maal één van de verstrengelde fotonen van een fotonen paar (tegengestelde polarisatie). Ze meten dus elk N keer. Bij elke meting kiezen ze een random richting van hun polarisatie filter in het z-x-vlak. Als A en B toevallig in (ongeveer) dezelfde richting meten dan zullen ze bijna altijd een tegengestelde waarde voor de polarisatie vinden. Terwijl ze slechts in 50% van de gevallen dezelfde waarde meten als hun polarisatoren loodrecht op elkaar staan. Ze zullen dus vaker dan gemiddeld beide + meten. Dat is wat ze zien als ze na de meting hun resultaten met elkaar vergelijken. De resultaten blijken gecorreleerd te zijn zonder dat er interactie heeft plaats gevonden tussen A en B. **Zie ook Sakurai p225/6**. In dit hoofdstuk zullen we deze niet-klassieke correlaties bespreken.

Enkele termen

Niet-lokaliteit

De relativiteitstheorie zegt dat signalen (informatie) niet sneller reizen dan het licht. Er kan dus geen verband zijn tussen A en B als hun onderlinge afstand d zo groot is dat de tijd Δt tussen twee metingen groter is dan d/c . Hoe kan er dan een verband ontstaan tussen de metingen van A en die van B. Einstein noemde dat “spooky action at a distance”. Tegenwoordig heeft men het over niet-lokaliteit. Aan het eind van dit hoofdstuk (8.3.4) zullen we zien dat er bij het ontstaan van de correlaties tussen verstrengelde deeltjes geen sprake is van instantane werking op afstand. Er is dus geen tegenspraak met de relativiteitstheorie.

Confounding factors:

Een statistische correlatie tussen twee grootheden (bijv. tussen voeding en gezondheid) betekent zelden dat er sprake is van causaal verband.

Bijv. Koffiedrinkers krijgen vaker longkanker (geldt ook voor alcoholisten);

Mensen die een ijsje eten verdrinken sneller.

Hidden variables.

Definitie: een niet-geobserveerde variabele die het gedrag van een systeem mede bepaalt, maar die buiten het model blijft.

John Bell heeft laten zien dat een verklaring van de hierboven genoemde correlaties met klassieke, zgn. “hidden variables” experimenteel getest kan worden. De “hidden variables” zouden leiden tot het ontstaan van ongelijkheden in de resultaten van metingen van A en B. Inmiddels zijn er veel experimenten gedaan met als resultaat dat de “hidden variables” theorie erg onwaarschijnlijk is geworden.

We zullen eerst een voorbeeld bespreken van de hand van R. Feynmann (die in zijn artikel Bell’s werk niet noemt). Feynmann’s artikel gaat over de vraag of we de quantummechanica met een klassieke computer kunnen simuleren. Het antwoord is “nee”. A kan de haar metingen simuleren in een klassieke computer, en B kan zijn metingen simuleren in zijn klassieke computer, maar ze kunnen de resultaten van metingen aan verstrengelde fotonen alleen simuleren als hun klassiek computers verbonden zijn met een kabel die het mogelijk maakt informatie uit te wisselen. Quantummechanica kan alleen gesimuleerd worden in een computer die qubits bevat, een echte quantumcomputer dus.

8.1 Feynmann’s voorbeeld (Bell ongelijkheid):

Simulating Physics with Computers, by R. Feynmann ([Untitled](#))

Feynmann bespreekt een experiment waarin er 2 fotonen met **gelijke polarisatierichting** tegelijk worden geproduceerd. Dat gebeurt bijvoorbeeld tijdens de $3s \rightarrow 2p \rightarrow 1s$ overgang in het H atoom. Het ene foton gaat naar A en het andere naar B die beide beschikken over een polarisatie filter met daarachter een detector. De twee (verstrengelde) fotonen bevinden zich in de toestand die is opgebouwd uit de basisvectoren

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A |H\rangle_B + |V\rangle_A |V\rangle_B)$$

Beide zijn dus of in horizontale richting gepolariseerd of in verticale richting. Zolang er niet gemeten wordt hebben we geen informatie over de individuele spins, maar zodra A met een bepaalde keuze voor de oriëntatie van haar filter een detectie doet weet ze dat B ook die

zelfde oriëntatie heeft hoe ver B ook van haar vandaan staat. Dat is een voorbeeld van “spooky action at a distance”.

A’s polarisator maakt een hoek ϑ met de verticaal en B’s polarisator maakt een hoek φ ten opzichte van de verticale richting. Meting van polarisatie in de $\uparrow$ richting betekent dat

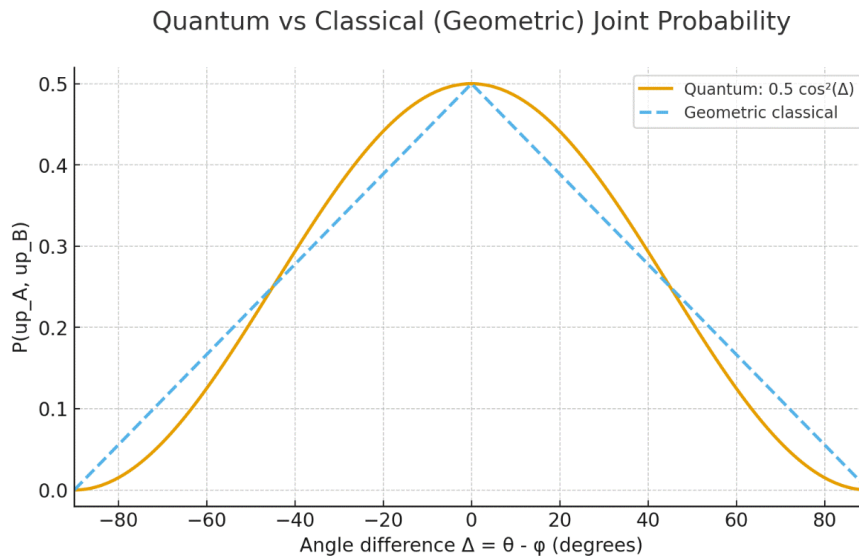
$$|\vartheta\rangle = \cos(\vartheta) |H\rangle_A + \sin(\vartheta) |V\rangle_A \quad \text{en} \quad |\varphi\rangle = \cos(\varphi) |H\rangle_B + \sin(\varphi) |V\rangle_B$$

De waarschijnlijkheid dat A en B beide $\uparrow$ detecteren is gelijk aan de projectie van $|\psi\rangle$ op $|\vartheta\rangle_A |\varphi\rangle_B$

$$P(\uparrow\uparrow) = |\langle\vartheta, \varphi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}(\cos(\vartheta)\cos(\varphi) + \sin(\vartheta)\sin(\varphi)) = \frac{1}{2}\cos^2(\vartheta - \varphi)$$

De waarschijnlijkheid dat beide $\downarrow$ meten is ook $\frac{1}{2}\cos^2(\vartheta - \varphi)$. En de waarschijnlijkheid

$$P(\uparrow\downarrow) = |\langle\vartheta, \varphi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(\vartheta - \varphi)$$



In bovenstaand plaatje is $P(\uparrow\uparrow)$ getekend als functie van het hoekverschil $\vartheta - \varphi$. De blauwe stippellijn geeft de klassieke (hidden variable) voorspelling. Hierin hebben beide fotonen een definitieve polarisatie richting φ die uniform verdeeld is over de hoeken van $0 - \pi$. Je kunt gemakkelijk inzien dat dat een rechte lijn moet zijn die van 1 naar 0 loopt over 90° . Die geometrische (klassieke) voorspelling wordt gegeven door

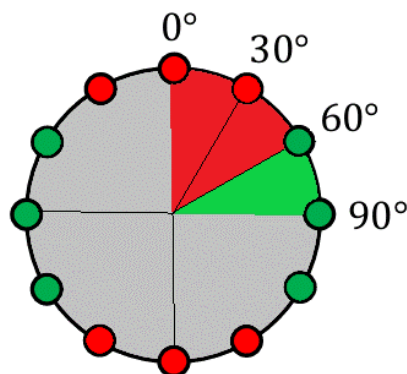
$$P_{\text{klassiek}}(\uparrow\uparrow) = \frac{1}{2} - \frac{|\vartheta - \varphi|}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{|\Delta|}{\pi}$$

Merk op dat de quantum kans $P(\uparrow\uparrow)$ behoorlijk groter is dan de klassieke kans voor de kleine Δ en kleiner voor $\Delta \sim \pi/2$. Dat is de correlatie die ontstaat als gevolg van verstrengeling.

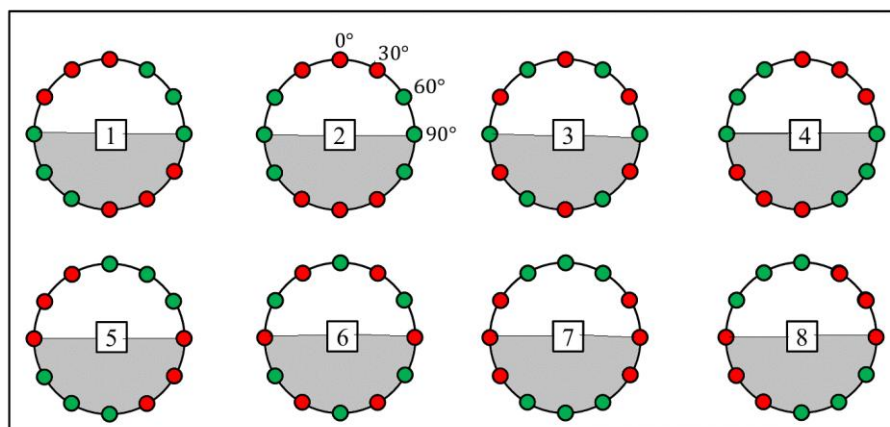
Hoe kunnen we dit testen? Is er sprake van “hidden variables” ofwel regels, of instructies (of condities) die voor iedere meting vastgelegd zijn en die bepalen wat A en B meten als de fotonen een bepaalde polarisatie richting hebben?

Richard Feynmann bedacht een eenvoudig gedachten experiment om te laten zien dat de correlaties die ontstaan tussen metingen aan een verstrengeld paar fotonen niet klassiek verklaard kunnen worden. A en B doen een serie metingen van de polarisatie van het foton dat ze ontvangen. We gaan er van uit dat het tevoren vast staat wat de polarisatie richting van de fotonen is en welk resultaat A en B meten bij een bepaalde hoek ϑ en φ : wel een detectie (+, groene stip) of geen detectie (–, rode stip). Ze kiezen die hoeken willekeurig en onafhankelijk van elkaar en vergelijken na hun metingen hun resultaten voor verschillende Δ -waarden om te zien of er sprake is van correlatie. We weten niet welke regel er geldt. De regel (de hidden variable = de polarisatierichting van het foton) bepaalt wat A (en dus ook B) meten bij een bepaalde hoek Δ . Hieronder staan 2 mogelijke regels. We mogen bij iedere fotonpaar één van de drie richtingen ϑ , φ of de polarisatierichting van het foton vast kiezen. We kiezen daarvoor de polarisatierichting van de fotonen en zetten die in verticale richting. We verdelen het hoekverschil tussen de polarisatierichting van de fotonen en de verticale richting ($0^\circ - 90^\circ$) in drie gelijke delen van 30° . Er zijn dan 8 mogelijke combinaties mogelijk voor de metingen van A en B. Hieronder staat een voorbeeld.

Regel 1 Het rode rondje bovenaan de cirkel geeft aan dat de meting – oplevert in het interval van $0^\circ - 30^\circ$. Het tweede rondje geeft ook – aan voor $30^\circ - 60^\circ$. En het derde groene rondje geeft aan dat de meting + oplevert voor $60^\circ - 90^\circ$. Het rondje bij 90° moet groen zijn omdat de kleuren van rondjes die 90° van elkaar liggen tegengesteld moeten zijn. Als de kleuren voor de drie intervals van 30° gekozen zijn liggen de kleuren voor alle andere rondjes op de cirkel vast.



Zo zijn er 8 ($=2^3$) 8 mogelijke regels. Meer zijn er niet. De cirkel hierboven komt overeen met nr 2 hieronder.



Bij elke meting kan de “hidden variable” één van de 8 mogelijke regels kiezen. Kan dit de metingen verklaren? Stel nu dat A en B hun resultaten vergelijken voor het geval dat $\vartheta - \varphi = 30^\circ$. Wat is dan de waarschijnlijkheid $P(\uparrow\uparrow) + P(\downarrow\downarrow)$ dat we dezelfde uitkomst (= kleur) vinden voor de bolletjes direct naast elkaar. Hoeveel naast elkaar gelegen bolletjes hebben dezelfde kleur. De cirkels hebben allen een symmetrielijns door het centrum. We kunnen ons dus beperken tot de bovenhelften van de cirkels. Die bovenhelften hebben 6 bolletjes. In cirkel 1 hebben 4 bolletjes een buur met dezelfde kleur. De waarschijnlijkheid $P(\uparrow\uparrow) + P(\downarrow\downarrow)$ voor cirkel 1 is dus $4/6$. Sommige van de cirkels (bijv. 2) hebben een waarschijnlijkheid van $3/6$ en andere 0. **Klassiek kan de waarschijnlijkheid dus niet groter dan $2/3$ worden.** De quantummechanica voorspelt dat

$$P(\uparrow\uparrow) + P(\downarrow\downarrow) = \cos^2(30^\circ) = \frac{3}{4}$$

En dat wordt bevestigd door de experimenten.

De conclusie: De veronderstelling dat de correlatie veroorzaakt wordt door een onbekende variabele die de metingen beïnvloedt klopt niet. Dit is een voorbeeld van de Bell ongelijkheden.

8.2 Bell ongelijkheden voor spin-1/2 deeltjes

We kunnen ook Bell ongelijkheden afleiden voor verstrengelde toestanden van spin-1/2 deeltjes (zie J.J. Sakurai, p 228-230). We willen een model testen waarin de spin van de deeltjes vast ligt en ook het resultaat van metingen in verschillende richtingen. We gebruiken een SG-apparaat en meten de spin van de deeltjes in 3 richtingen ($\hat{a}$, $\hat{b}$, en $\hat{c}$) in het $x - y$ vlak loodrecht op de baan van de deeltjes. De hoeken tussen de drie vectoren noemen we ϑ_{ab} , ϑ_{ac} , en ϑ_{bc} . We veronderstellen dat de twee deeltjes van een spin singlet tot een bepaald type horen wat betreft de uitslag van metingen in de drie richtingen, bijv. $(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$ waarbij meting langs $\hat{a}$ spin – oplevert, enz. Het tweede deeltje van het singlet moet dan van het type $(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$ zijn, omdat het totale impulsmoment 0 is. Elk foton paar heeft 1 van de 8 recepten (of instructies) zoals $(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$ voor A en $(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$ voor B. Er zijn dan 8 recepten mogelijk, nl.

TABLE 3.2. Spin-component Matching in the Alternative Theories

Population	Particle 1	Particle 2
N_1	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$
N_2	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$
N_3	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$
N_4	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$
N_5	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$
N_6	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$
N_7	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$
N_8	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$

We kunnen nu als volgt een Bell ongelijkheid opstellen. We kiezen het totaal aantal deeltjes waarvoor geldt dat A een + meet langs $\hat{a}$, en B een + meet langs $\hat{b}$. Het totaal aantal deeltjes waar dat voor geldt is $N_3 + N_4$. Dat aantal moet natuurlijk kleiner zijn dan $N_2 + N_4 + N_3 + N_7$ en dus

$$N_3 + N_4 \leq N_2 + N_4 + (N_3 + N_7)$$

We definiëren $P(\hat{a}+, \hat{b}+)$ als de waarschijnlijkheid dat A $\hat{a}+$ meet en B $\hat{b}+$ ($= N_3 + N_4 / \sum N_i$). We de formule hierboven dan ook schrijven als

$$P(\hat{a}+, \hat{b}+) \leq P(\hat{a}+, \hat{c}+) + P(\hat{c}+, \hat{b}+)$$

Deze ongelijkheid ontstaat als we er van uitgaan dat een bepaald deel van de deeltjes tot een specifieke groep behoren. *Dat is een andere manier van rekenen dan de quantum mechanische rekenwijze waarin we ervan uitgaan dat alle paren beschreven worden door dezelfde singlet ket.* Als we deeltje 1 in de $\hat{a}$ richting meten dan is de kans $1/2$ dat het deeltje spin up heeft. Deeltje 2 heeft dan spin down in die richting. Als we nu de spin van deeltje 2 in de richting $\hat{b}$ meten dan kunnen we met het resultaat uit hoofdstuk 6 de kans berekenen dat het deeltje spin up in de richting $\hat{b}$ heeft. De waarschijnlijkheid is dan (zie ook Sakurai p230).

$$P(\hat{a}+, \hat{b}+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_{ab}}{2}$$

De factor $\frac{1}{2}$ vóór de $\sin^2$ staat voor de kans dat het eerste deeltje spin up heeft in de $\hat{a}$ richting. De voorlaatste formule kunnen we nu schrijven als (we kunnen de factor $1/2$ nu weer weglaten)

$$\sin^2 \frac{\vartheta_{ab}}{2} \leq \sin^2 \frac{\vartheta_{ac}}{2} + \sin^2 \frac{\vartheta_{bc}}{2}$$

Dit is een voorbeeld van een Bell ongelijkheid. Bell liet zien dat dit soort ongelijkheden ontstaan wanneer we er van uitgaan dat de correlaties tussen de deeltjes verklaard kan worden door het bestaan van “verborgen variabelen”. We nemen nu als voorbeeld de hoeken $\vartheta_{ab} =$

2ϑ , en $\vartheta_{ac} = \vartheta_{bc} = \vartheta$. Als we nu $\vartheta = \pi/4$ kiezen en invullen in de vergelijking hierboven dan vinden we dat

$$0.5 \leq 0.292$$

Meer algemeen levert de Bell ongelijkheid geschonden wordt voor $0 < \vartheta < \pi/2$. Experimenten laten zien dat de Bell ongelijkheid inderdaad geschonden wordt. We zullen onze klassieke theorie moeten inwisselen voor de quantummechanische beschrijving. Ook een theorie met verborgen variabelen zal de klassieke theorie niet redden.

Feynmann:

- [ILE](#): “there is plenty of room at the bottom
- s2.smu.edu/~mitch/class/5395/papers/feynman-quantum-1981.pdf “simulating physics with computers
- [11557_23417_110730.pdf](#) “Quantum mechanical computers”

[A Short History of Quantum Entanglement | Galileo Unbound](#)

[2106.10522](#) Quantum computing Preskill

[Nobelprijs natuurkunde voor aantonen non-lokaliteit quantumverstrengeling - Quantum Physics & Consciousness](#)

Hidden variables = geheime afspraken.

8.3 Pure (zowel product als verstrengelde) toestanden en gemengde toestanden.

In de quantummechanica maken we onderscheid tussen toestanden waarvan we golffunctie (ket) exact kennen en toestanden die uit gemengde ensembles bestaan. Eén of meer deeltjes systemen kunnen in de quantummechanica beschreven worden als een product toestand of als een verstrengelde toestand. In beide gevallen Dit zijn beide “**pure**” toestanden, d.w.z. dat ze door één golffunctie (ket) beschreven worden met een lengte 1, dus $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Naast pure toestanden zijn er ook “**gemengde**” toestanden. Gemengde toestanden beschrijven gemengde ensembles. De golffunctie is dan de som van een aantal golffuncties die elk een bepaalde waarschijnlijkheid hebben. Gemengde toestanden worden beschreven met de “dichtheidsoperator”

8.3.1 De projectie operator (Susskind 9. 193 e.v. zie ook 5 van deze syllabus)

We kennen het inproduct van twee golffuncties: $\langle\phi|\psi\rangle$. We kunnen dit in matrixvorm schrijven als het product van een kolommatrix en een rijmatrix:

$$\langle\phi|\psi\rangle = (\phi_1^* \quad \phi_2^* \quad \phi_3^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \sum_i \phi_i^* \psi_i$$

Zo kunnen we ook een uitproduct definiëren:

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} (\phi_1^* \quad \phi_2^* \quad \phi_3^*) = \begin{pmatrix} \psi_1\phi_1^* & \psi_1\phi_2^* & \psi_1\phi_3^* \\ \psi_2\phi_1^* & \psi_2\phi_2^* & \psi_2\phi_3^* \\ \psi_3\phi_1^* & \psi_3\phi_2^* & \psi_3\phi_3^* \end{pmatrix}$$

Dit is een operator die kan werken op vectoren uit dezelfde Hilbert ruimte. De werking van de dichtheidsoperator op $|A\rangle$ is het inproduct $\langle\phi|A\rangle$ vermenigvuldigd met $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle\langle\phi| |A\rangle = |\psi\rangle \langle\phi|A\rangle$$

Je kunt het inproduct ook laten werken op bra's: $\langle A| |\psi\rangle\langle\phi| = \langle A| \psi\rangle \langle\phi|$

We noemen nu het uitproduct van een (genormaliseerde) ket met zichzelf een projectie operator:

$$\mathbf{P} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Het kwadraat van een projectie operator gelijk is aan de projectie operator:

$$\mathbf{P}^2(|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = |\psi\rangle\langle\psi| = \mathbf{P}$$

Deze operator projecteert een vector op de richting van $|\psi\rangle$. Het is niet moeilijk te bewijzen dat projectie operatoren hermitisch zijn en dat een vector $|\psi\rangle$ een orthogonale eigenvector is van $|\psi\rangle\langle\psi|$ met eigenwaarde 1.

$$|\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle = |\psi\rangle \langle\psi|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Als we de projectie operatoren van een basis stelsel van orthonormale eigenvectoren (van een hermitische operator) kiezen dan vinden dat dat gelijk is aan de identiteitsoperator:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = I$$

Dit is een handige formule die we bij allerlei afleidingen kunnen gebruiken. De som over de diagonaal elementen van de (gediagonaliseerde) projectie operator noemen we het spoor van de operator. Het **spoor** (trace) van een operator wordt dus gegeven door:

$$Tr \mathbf{A} = \sum_i \langle i| \mathbf{A} |i\rangle$$

Als we dit toepassen op $\mathbf{P}$ dan vinden we

$$Tr \mathbf{P} = \sum_i \langle i| \mathbf{P} |i\rangle = 1$$

Je kunt een hermitische operator zoals de projectie operator altijd diagonaliseren door middel van een transformatie met een unitaire matrix. De diagonaal elementen zijn dan de eigenwaarden van de operator. **Het spoor van een operator is invariant onder zo'n transformatie** (Bewijs). Het spoor hangt dus niet af van welk stelsel basisvectoren we gebruiken. Het is een belangrijke fysische eigenschap van het systeem. We kunnen het spoor van de projectieoperator gebruiken om de verwachtingswaarde van een observabele $\mathbf{M}$ te berekenen:

$$Tr |\psi\rangle\langle\psi| \mathbf{M} = \sum_i \langle i|\psi\rangle \langle\psi|\mathbf{M}|i\rangle = \sum_i \langle\psi|\mathbf{M}|i\rangle \langle i|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbf{M}|\psi\rangle = \langle\mathbf{M}\rangle$$

8.3.2 De dichtheidsmatrix (of dichtheidsoperator) (S 7.3)

Wanneer we met meer dan 1 of meer (ensembles van) deeltjes te maken kunnen we de toestand van een systeem beschrijven met een combinatie van projectie operatoren met waarschijnlijkheden p_i . Zo'n combinatie noemen we een dichtheidsoperator of dichtheidsmatrix ρ

$$\rho = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \dots$$

met $\sum_i p_i = 1$. We noemen de toestand van het systeem een **gemengde** toestand wanneer het een combinatie van toestanden is zoals hierboven, en een **pure** toestand wanneer het met slechts 1 toestandsvector beschreven kan worden (met $p_1 = 1$)

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

en een. We noemen ρ een dichtheidsmatrix wanneer we een basis voor de toestandsvectoren gekozen hebben. Kiezen we bijv. de basis $|a\rangle$, dan is de representatie van ρ ten opzichte van die basis

$$\rho_{aa'} = \langle a|\psi\rangle\langle\psi|a'\rangle = \langle a|\rho|a'\rangle = \psi(a)\psi^*(a')$$

en $\rho_{aa'} = \rho_{a'a}^*$. Voor zowel zuivere als gemengde toestanden geldt

$$\text{Tr}\rho = 1$$

Dit geldt in een orthonormale basis, omdat dan $\text{Tr}|\psi\rangle\langle\psi| = \langle\psi|\psi\rangle = 1$

De laatste formule van de vorige paragraaf laat zien dat we de dichtheidsoperator of matrix kunnen gebruiken om alle fysische eigenschappen te bepalen van een toestand $|\psi\rangle$. De dichtheidsmatrix bevat dus alle fysische informatie over de toestand of het ensemble van toestanden die we beschrijven. De laatste formule van 8.3.1 luidt

$$\langle M \rangle = \text{Tr} \rho M$$

Of in matrixvorm

$$\langle M \rangle = \sum_{a,a'} M_{a'a} \rho_{aa'} = \sum_{a,a'} \psi(a) M_{a'a} \psi^*(a')$$

waarin $M_{a'a} = \langle a'|M|a\rangle$

“a given physical state can be described by any ket of the form $\exp(i\theta)|\psi\rangle$ with θ an arbitrary phase, but by only one density matrix ρ . This is more economical, to say the least”

De verwachtingswaarde van een operator M voor een gemengde toestand is

$$\text{Tr} \rho_{\text{mixed}} M = \sum_i p_i \text{Tr} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| M$$

We zullen hierna zien dat gemengde toestanden een lagere entropie (meer “missing information”) bevatten dan zuivere toestanden. Hier stellen we vast dat de dichtheidsmatrices van zuivere en gemengde toestanden in twee opzichten van elkaar verschillen:

Voor zuivere toestanden geldt (volgt uit de definitie met $\langle\psi|\psi\rangle = 1$):

$$\rho_{pure}^2 = \rho_{pure}$$

en

$$\text{Tr} \rho_{pure}^2 = 1$$

Voor gemengde toestanden geldt

$$\rho_{mixed}^2 \neq \rho_{mixed}$$

en

$$\text{Tr} \rho_{mixed}^2 \leq 1$$

De laatste 2 vergelijkingen volgen uit het gegeven dat we iedere Hermitische dichtheidsmatrix altijd kunnen diagonaliseren. Voor de diagonaalelementen van ρ_{mixed} geldt dat geen van de diagonaalelementen gelijk kan zijn aan 1, omdat we dan met een pure toestand te maken zouden hebben. Alle diagonaalelementen moeten dus kleiner zijn dan 1. De diagonaal elementen van ρ_{mixed}^2 zijn de overeenkomstige diagonaalelementen van ρ_{mixed} in het kwadraat. Die zijn dus altijd kleiner dan de diagonaalelementen van ρ_{mixed} , waarmee bewezen is dat $\sum_i \rho_{mixed}^2(i, i) \leq 1$. Hiermee hebben we een basisonafhankelijke manier om zuivere toestanden te onderscheiden van gemengde. We zullen hierna (...) zien dat het onderscheid direct te maken heeft met de hoeveelheid entropie van het systeem dat we beschrijven.

Het is belangrijk om te benadrukken dat de dichtheidsoperator (of dichtheidsmatrix) de drager is van de fysische eigenschappen van het systeem.

8.3.3 Dichtheidsmatrix voor 2 deeltjes systemen

In de klassieke fysica beschrijven we de toestand van 2 (of meer) deeltjes met een functie die de positie en impuls van de deeltjes beschrijft. Als de deeltjes een positie en impuls hebben kunnen we spreken van een zuivere toestand. Wanneer de positie of impuls wordt weergegeven door een waarschijnlijkheidsverdeling kunnen we spreken van een gemengde toestand. In het laatste geval zal de entropie (hoeveelheid “missing information”) groter zijn dan in het eerste geval. Dat is in de quantummechanica niet anders, maar er is wel een verschil. Twee deeltjes kunnen gezamenlijk in een zuivere toestand zijn (beschreven door één toestandsvector), maar individueel in een gemengde toestand. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer deeltjes met elkaar verstrengeld zijn. We hebben dan volledige kennis van de gehele (verstrengelde) toestand AB, maar niet van de afzonderlijke toestanden A en B. We kunnen dat laten zien aan de hand van de dichtheidsmatrix voor die twee gevallen.

We beginnen met het klassieke voorbeeld van A en B die allebei een munt opgooien. De resultaten van A en B zijn volledig onafhankelijk van elkaar. De toestandsvectoren voor de munten van A en B zijn

$$|\Psi\rangle_A = a|u\rangle + b|d\rangle, \quad |\Psi\rangle_B = c|u\rangle + d|d\rangle$$

met $a^*a + b^*b = 1$ en $c^*c + d^*d = 1$. We kunnen natuurlijk het voorbeeld van twee gelijke ongecorreleerde munten nemen waarbij de kans op kop of munt gelijk is aan $1/2$. A en B zijn dan beide in de gemengde toestand $|\Psi\rangle_A = |\Psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle + |d\rangle)$ met dichtheidsmatrix

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|u\rangle\langle u| + |d\rangle\langle d|) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

We nemen als voorbeeld $a = b = 1/\sqrt{2}$ en $c = 1, d = 0$. De dichtheidsmatrix van A is

$$\rho_A = |\Psi\rangle\langle\Psi|_A = \begin{pmatrix} a^*a & a^*b \\ b^*a & b^*b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \rho_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Het is eenvoudig te zien dat $\rho_A^2 = \rho$ en dat $\text{Tr}\rho_A^2 = 1$.

Het tensorproduct van beide toestanden is een product toestand (7.1):

$$|\Psi\rangle_{AB} = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (c|\uparrow\rangle + d|\downarrow\rangle)_B = (ac|\uparrow\uparrow\rangle + ad|\uparrow\downarrow\rangle + bc|\downarrow\uparrow\rangle + bd|\downarrow\downarrow\rangle)$$

. We vinden dan (in matrixvorm)

$$|\Psi\rangle_{AB} = \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \otimes \left[c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

De dichtheidsmatrix wordt dan (zie 8.3.3)

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AB} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{AB} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We zien dat nog steeds geldt: $\rho_{AB}^2 = \rho$ en dat $\text{Tr}\rho_{AB}^2 = 1$. De dichtheidsmatrix van 2 onafhankelijke qubits kun je factoriseren:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

Je kunt de dichtheidsmatrices van A en B ook vinden door de dichtheidsmatrix ρ_{AB} te “reducen”, d.w.z. door in de 4 submatrices (voor A_{11}, A_{12}, A_{21} en A_{22}) waarin de elementen waarin de B-indices hetzelfde zijn (blauw aangegeven) bij elkaar op te tellen (“weg te traceren”) en de andere (rood aangegeven) weg te strepen.

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \rho_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ook hier geldt weer $\rho_A^2 = \rho_A$ en dat $\text{Tr}\rho_A^2 = 1$, en $\rho_B^2 = \rho_B$ en dat $\text{Tr}\rho_B^2 = 1$

We nemen nu een verstrengelde toestand, een zogenaamd Bell paar:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \quad \text{of} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

Dit is weer een zuivere toestand. De dichtheidsmatrix is

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AB}, \text{ en dus } \rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$$

We kennen dus de toestand van het systeem AB volledig. Toch hebben A en B geen volledige informatie over de toestand van hun aparte systeem. We werken eerst de matrixvorm voor ρ_{AB} uit.

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als we nu B wegtraceren zoals we hierboven deden vinden we voor A's dichtheidsmatrix:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \rightarrow \rho_A^2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

We vinden dus dat voor A's toestand geldt dat $\rho_A^2 \neq \rho_A$ en dat $\text{Tr} \rho_A^2 \leq 1$. A's toestand is een gemengde toestand terwijl de gecombineerde toestand AB zuiver is. De entropie (= "missing information") van de toestand A is groter dan die van het gehele systeem AB. Een deel van de informatie over A en B afzonderlijk zit in het gecombineerde systeem.

8.3.3 Entropie en de dichtheidsmatrix

In de **syllabus over Entropie** wordt uitgelegd wat de entropie is van een klassiek deeltje waarvan de positie beschreven wordt door een waarschijnlijkheidsverdeling. Wanneer we p_i de waarschijnlijkheid noemen dat een deeltje zich op positie i bevindt dan is de entropie voor die verdeling gegeven door de Shannon entropie. De Shannon entropie is een maat voor de hoeveelheid kennis die we missen over een bepaalde waarschijnlijkheidsverdeling. Wanneer een deeltje zich bijv. op één van n posities bevindt en we kennen de waarschijnlijkheden p_i voor die posities ($i = 1 \dots n$) dan wordt de Shannon entropie gegeven door

$$S_{Shannon} = - \sum_i^n p_i \ln p_i$$

Deze entropie is een maat voor de informatie die we missen over de positie van het deeltje. Deze uitdrukking voor de entropie sluit mooi aan bij Boltzmann's formule voor de thermodynamische entropie van een gas:

$$S = k_B \ln \mathbb{W}$$

Waarin $\mathbb{W}$ het aantal microtoestanden is (in positie en snelheid) waarin een gas zich kan bevinden. Wanneer we dit toepassen op de verdeling van N deeltjes over n mogelijke posities vinden we

$$\ln \mathbb{W} = -N \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

Dat komt overeen met de het voorbeeld dat we hierboven Shannon entropie voor de positie van 1 deeltje.

Von Neumann vond een uitdrukking voor de entropie in voor de quantummechanica. Hij ging er van uit dat de klassieke kansverdeling overeen zou moeten komen met de eigenwaarden van de dichtheidsmatrix. Wanneer we de dichtheidsmatrix in een diagonale basis schrijven

$$\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

Dan zou de entropie de volgende vorm krijgen

$$S(\rho) = -k_B \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i$$

Deze definitie voldoet aan de volgende eisen

- 1) de definitie is onafhankelijk van de gebruikte basis,
- 2) $S(\rho)$ voor een zuivere toestand is 0, omdat ρ dan als eigenwaarden heeft (1,0,0...),
- 3) Voor 2 onafhankelijke systemen geldt $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$, omdat $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ en $\ln(\rho_A \otimes \rho_B) = \ln(\rho_A) \otimes I + I \otimes \ln(\rho_B)$,
- 4) Voor een zuivere toestand van 2 deeltjes geldt dat $S(\rho_{AB}) = 0$, maar $S(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB}) > 0$ alleen als A en B verstrengeld zijn.

Het laatste criterium is natuurlijk erg belangrijk om te bepalen wanneer er sprake is van verstrengeling. Von Neumann definieert de entropie – vóórdat Shannon zijn definitie had gegeven - als

$$S(\rho) = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho)$$

Deze formule volgt uit

$$\begin{aligned} \ln \rho &= \sum_i \ln \lambda_i |i\rangle\langle i| \\ \rho \ln \rho &= \left(\sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \right) \sum_i \ln \lambda_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i |i\rangle\langle i| \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid volgt uit het feit dat we orthogonale basis hebben. We weten dat

$$\text{Tr}(\rho \ln \rho) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

waarmee von Neumann's uitdrukking vinden.

Tenslotte nog iets over het verschil tussen de waarschijnlijkheden van een gemengde toestand en de eigenwaarden van de bijbehorende dichtheidsmatrix. Een gemengde toestand kan gegeven worden als

$$\rho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \dots$$

Hierin zijn de p_i 's de kansen dat het systeem zich in de toestand $|\psi_i\rangle$ bevindt (met $\sum_i p_i = 1$). Dit lijkt op de uitdrukking die uitdrukking waarmee we deze paragraaf begonnen, maar de p_i 's in deze formule hoeven niet gelijk te zijn aan de eigenwaarden van ρ . De p -waarden beschrijven een bepaald mengsel. Die beschrijving is niet uniek en de p_i 's (kansen) kunnen verschillen van de λ_i 's (eigenwaarden). Om von Neumann's formule toe te passen moeten we dus eerste bepalen wat de eigen waarden en eigenfuncties van ρ zijn. De p_i 's zijn geen intrinsieke eigenschappen van ρ . **Meetbare grootheden en entropie hangen alleen van de eigenwaarden van de dichtheidsmatrix (de λ_i 's) af.**

Voorbeeld:

Kies een qubit basis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

We kiezen de mengtoestand met $p_1 = 0.6$ en $p_2 = 0.4/\sqrt{2}$

$$\Psi = p_1\psi_1 + p_2\psi_2 = 0.6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0.4}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

De dichtheidsmatrix is dan

$$\rho = 0.6|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = 0.6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

De eigenwaarden volgen uit $\det(\rho - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 0.12 = 0$$

Met als oplossing: $\lambda_1 = 0.86$ en $\lambda_2 = 0.14$. De eigenfuncties kunnen we berekenen door $(\rho - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ op te lossen voor λ_1 en λ_2 . We zien direct dat deze waarden niet gelijk zijn aan p_1 en p_2 . De p_i 's zijn alleen gelijk aan de λ_i 's wanneer de ψ_i 's orthogonaal zijn en gelijk aan de eigenvectoren van ρ . De p_i 's beschrijven hoe het systeem is voorbereid en de λ_i 's beschrijven hoe het systeem intrinsiek is.

8.3.4 Waarom er geen sprake is van instantane werking op afstand is bij meting aan verstrengelde deeltjes (S 7.9)

In 7.9 van zijn boek geeft Susskind een kort bewijs waarom er geen sprake kan zijn van instantane werking op afstand wanneer er sprake is van correlatie tussen verstrengelde deeltjes. We kunnen de golffunctie van de verstrengelde deeltjes waaraan A en B hun metingen doen schrijven als $\psi(a, b)$, waarin a en b de labels zijn van de eigenschappen die A en B. We zagen in 5.8 dat de verwachtingswaarde (expectation value) van een operator gegeven voor een toestand Ψ gegeven wordt door

$$\langle L \rangle = \langle \Psi^* | L | \Psi \rangle$$

In 8.3.2 schreven we de verwachtingswaarde van een operator als

$$\langle L \rangle = \text{Tr } \rho L$$

In matrixvorm is dat

$$\langle L \rangle = \sum_{a,a'} L_{a'a} \rho_{aa'} = \sum_{a,a'} \psi(a) L_{a'a} \psi^*(a')$$

waarin $L_{a'a} = \langle a' | L | a \rangle$ en $\rho_{aa'} = \langle a | L | a' \rangle$.

Nu breiden we dit uit naar de situatie waarin we twee verstrengelde deeltjes hebben in de toestand $\Psi(a, b)$, De variabele(n) a en b horen bij A resp. B. A meet de observabele L lokaal, dus de meting heeft geen effect op B. De verwachtingswaarde voor L is

$$\langle L \rangle = \sum_{ab, a'b'} \psi^*(a'b') L_{a'b', ab} \psi(ab)$$

Als A's meting van L geen enkel effect heeft op B's deeltje dan verandert b niet. We kunnen dan $L_{a'b', ab}$ schrijven in de vorm

$$L_{a'b', ab} = L_{a', a} \delta_{b'b}$$

Dit is een tensorproduct van de 2 2x2 matrices. Het is dus een 4x4 matrix. De verwachtingswaarde wordt dan

$$\langle L \rangle = \sum_{ab, a'} \psi^*(a'b) L_{a', a} \psi(ab)$$

Alle informatie zit voor A nu in de matrix

$$\rho_{aa'} = \sum_b \psi^*(a'b) \psi(ab)$$

Deze matrix heeft de vorm van een dichtheidsoperator voor een **gemengde** toestand, terwijl de oorspronkelijke, volledige toestand van de twee deeltjes zuiver is!

We hebben nu de dichtheidsmatrix van A en vragen ons af of B iets kan doen waardoor die matrix plotseling verandert? B's systeem kan alleen unitaire transformaties ondergaan. Veranderingen bij B worden beschreven door de unitaire matrix $U_{bb'}$. Een verandering in de toestand van B wordt dus beschreven door:

$$\psi_{final}(ab) = \sum_{b'} U_{bb'} \psi(ab')$$

De complex geconjugeerde van deze golffunctie is

$$\psi_{final}^*(a'b) = \sum_{b''} \psi^*(a'b'') U_{b''b}^\dagger$$

We vullen deze golffunctie nu in in de formule voor de dichtheidsmatrix van A die hierboven staat.

$$\rho_{aa'} = \sum_{b, b', b''} \psi^*(a'b'') U_{b''b}^\dagger U_{bb'} \psi(ab')$$

We weten dat voor de unitaire matrix geldt: $U_{b''b}^\dagger U_{bb'} = \delta_{b''b'}$. Als we dat invullen vinden we

$$\rho_{aa'} = \sum_{b'} \psi^*(a'b')\psi(ab') = \sum_b \psi^*(a'b)\psi(ab)$$

Deze dichtheidsmatrix is identiek aan de dichtheidsmatrix van A. Er is dus niets veranderd bij A. Een verandering van B's golf functie leidt dus niet tot een verandering in A's golf functie:
Geen werking op afstand!

9. Beroemde experimenten met fotonen

Alain Aspect, John F. Clauser, and Anton Zeilingerk regen in 2022 de Nobel prijs voor hun experimenten met de quantummechanica. Ze testten o.a. Bell's ongelijkheden, maar er zijn meer indrukwekkende experimenten die het karakter van de quantummechanica illustreren. We zullen er een paar van bespreken.

Twee spleten experiment: Interferentie met elektronen.

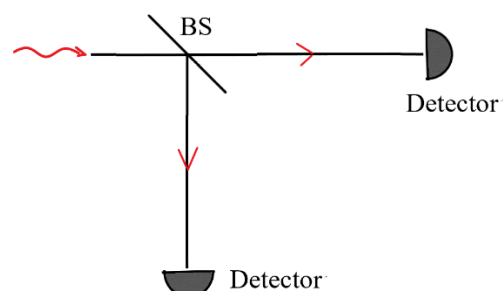
$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_2^*\Psi_1$$

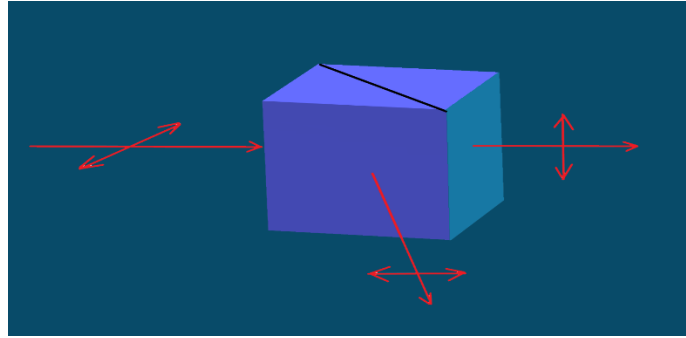
De eerste twee termen in het rechter lid zijn de golf functies voor spleet 1 als spleet 2 dicht is en voor spleet 2 als 1 dicht is en de laatste twee termen in het rechter lid doen alleen mee als ze beiden open zijn (interferentie), of beter, als we geen informatie hebben over welk pad een deeltje kiest (NPI=No Path Information).

9.1 De Beam splitter

We bekijken experimenten met individuele fotonen (we gaan hier niet in op de manier waarop je die produceert). We gebruiken detectoren om fotonen te detecteren en beam splitters (BS).



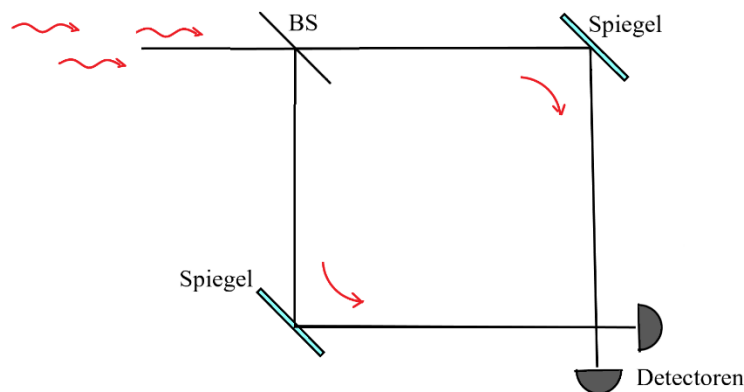
Als een foton een BS binnenkomt kan hij rechtdoor gaan of gereflecteerd worden. Je kunt je afvragen hoe en waar bepaald wordt welke weg het foton neemt? Gebeurt dat in de BS, of onderweg, of in de detector? Na de BS is het foton in een superpositie toestand van beide wegen. Op dezelfde manier kun je fotonen in een superpositie van verticale en horizontale polarisatietoestand brengen met behulp van een polariserende BS:



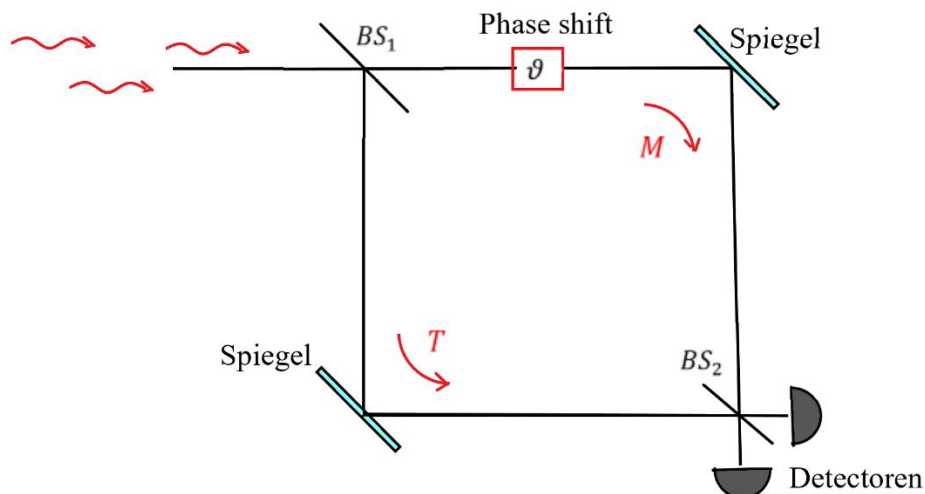
Het uitgaande foton wordt door een superpositie van horizontale en verticale polarisatie beschreven

$$|\Psi\rangle = |\nearrow\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow\rangle\right)$$

Quantummechanica zegt dat de kans dat in plaatje hieronder (de 50-50 BS) het foton rechtdoor gaat of gereflecteerd wordt 50% is. Een foton heeft dus de keuze uit twee paden: met de klok mee (M), of tegen de klok in (T). We kunnen niet voorspellen welke detector afgaat, maar de twee detectoren zullen dus elk gemiddeld 50% van de fotonen detecteren. Als een detector klikt weten we welk pad het foton genomen heeft.



In de volgende opstelling is er in het hoekpunt rechtsonder (tegenover de eerste BS een tweede BS geplaatst. BS_2



In die tweede BS hebben de fotonen weer de mogelijkheid om rechtdoor te gaan of een rechte hoek te maken. In de vorige opstelling wisten we welk pad een foton had afgelegd wanneer een detector afging. Nu weten we dat niet meer. Het pad dat een foton genomen heeft is nu onbepaald (“indeterminate”), op dezelfde manier als in het twee-spleten experiment. Er zal dus interferentie ontstaan. We kunnen dat quantummechanisch beschrijven. Er zijn 2 mogelijke paden die we beschrijven met toestandsvector

$$|\psi\rangle_{na\ BS_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|M\rangle + i|T\rangle]$$

De i zorgt er voor dat het T-pad een 90 graden faseverschuiving oppakt bij de reflectie in BS_1 . Daarnaast kan de weg M langer of korter gemaakt worden dan de weglengte T. Dat zorgt er voor dat er extra faseverschil ϑ tussen de twee paden naar gecreëerd wordt. Daarmee wordt de toestandsvector na de faseverschuiving:

$$|\psi\rangle_{tot\ BS_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\vartheta} |M\rangle + i|T\rangle]$$

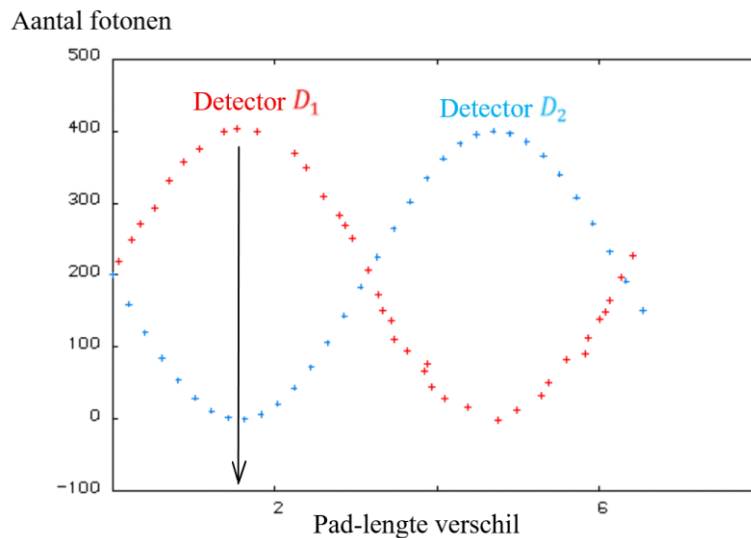
Na BS_2 wordt de toestandsvector $|M\rangle$ geschreven als $|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D_1\rangle + i|D_2\rangle)$. Een deel van de fotonen gaat naar detector D_1 en een ander deel naar D_2 . Op dezelfde manier kunnen we de toestandsvector $|T\rangle$ schrijven als $|T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D_2\rangle + i|D_1\rangle)$. Zo vinden we voor de toestandsvector na BS_2

$$|\psi\rangle_{na\ BS_2} = \frac{1}{2} [(e^{i\vartheta} - 1)|D_1\rangle + i(e^{i\vartheta} + 1)|D_2\rangle]$$

De waarschijnlijkheid dat een detector klikt is dan voor D_1 en D_2

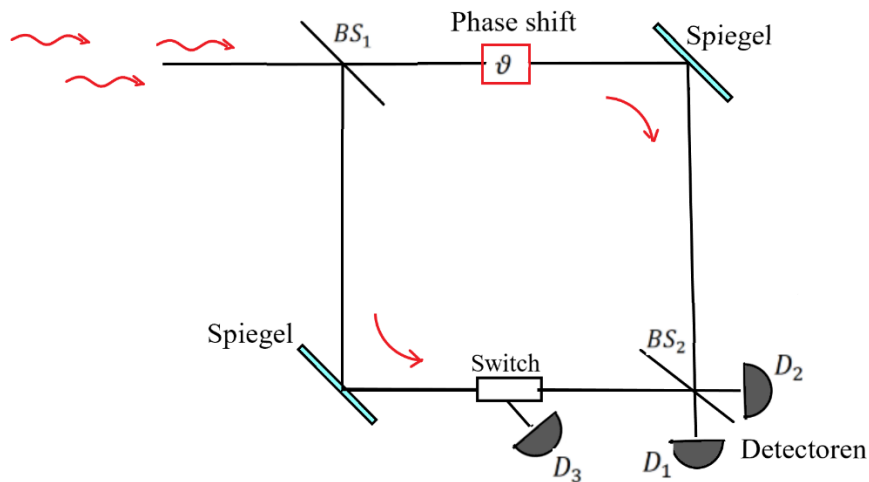
$$P_{D_1} = \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \quad \text{en} \quad P_{D_2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta)$$

We kunnen de fase dus veranderen en zien dat het effect van interferentie als we ϑ variëren. Hieronder is dat geïllustreerd



9.2 Delayed choice experimenten

In een klassiek experiment zou je veronderstellen dat een foton één van de twee wegen kiest als het BS_1 passeert. De quantummechanica leert ons dat dat niet zo is. Het idee is dat je langs het pad M of T een apparaatje kunt zetten waarmee een detector (D_3) aan-en uitgezet kan worden.



Als de detector uitstaat is de weg waarlangs de fotonen gaan onbekend en zien we interferentie. De Fase verschuiving is zo ingesteld dat alleen detector D_1 afgaat (zie het laatste plaatje in de vorige paragraaf). Als (de switch) detector D_3 aanstaat gaat plotseling D_2 ook af en toe af. Er is dan geen sprake meer van interferentie, omdat je weet langs welke weg het foton gekomen is. Detector D_3 kan heel snel aan-en uitgezet worden. Je kunt D_3 zelfs aanzetten in de korte tijd die verloopt tussen een (eventuele) passage door BS_1 en de aankomst bij D_3 . Je kiest dus pas of je wel of geen informatie over de weg wil hebben **nadat** een foton door BS_1 is gegaan. Het resultaat: Interferentie verdwijnt ook als je D_3 aanzet na de passage door BS_1 .

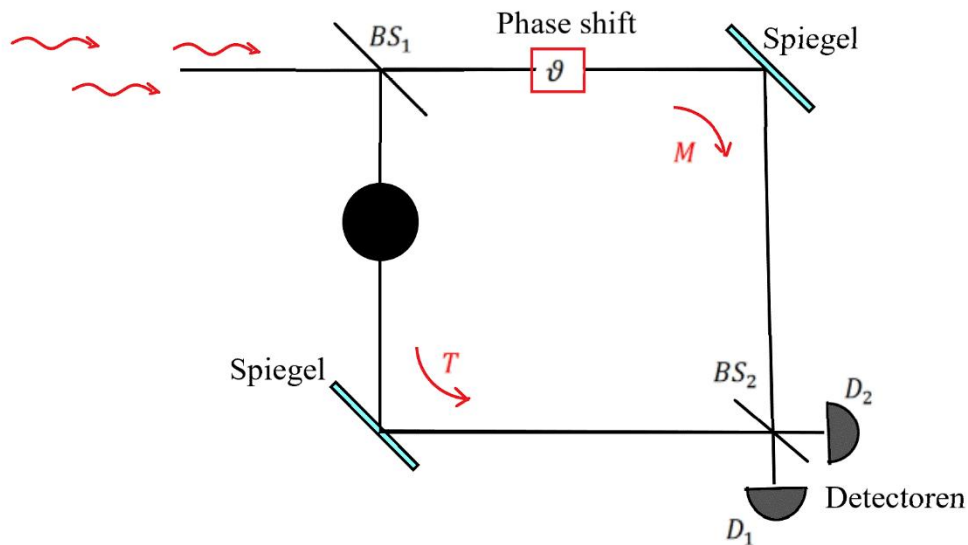
Er is nog een ander “delayed choice” experiment voorgesteld door J.A. Wheeler. In dit experiment hebben de paden een kosmologische afstand. Hij stelde voor om een dubbelbeeld van een quasar te bestuderen op de manier zoals hieronder geschetst.



De fotonen van de twee beelden worden in afzonderlijke detectoren opgevangen. Je verwacht dat er dan geen interferentie optreedt, omdat je van de weg kent die het foton genomen heeft. Dat verandert zodra je een BS op kruispunt van de twee paden zet. De crux van dit experiment is dat je het met afzonderlijke fotonen kunt doen die met een tijdverschil bij de waarnemer aankomen. Er wordt een foton uitgezonden door de quasar. Dat gebeurde 1 miljard jaar geleden. Het foton kan twee paden volgen. Gebruik je de opstelling in het bovenste plaatje dan bepaal je de weg die het foton gevolgd heeft. Zolang je de weg niet kent is het foton in een superpositie toestand van beide paden. Kies je – een miljard jaar nadat het foton werd uitgezonden - de opstelling met de BS dan krijg je een interferentiepatroon te zien waarin beide paden een rol spelen. Je zou dus kunnen concluderen dat het pad waarlangs het foton binnenkomt pas bepaald wordt op het moment dat er voor een bepaalde experimentele opstelling gekozen is (of waarop het foton gemeten wordt).

9.3 Meting zonder interactie

Tenslotte nog een experiment waarin je de aanwezigheid van een object in één van de twee banen (M of T) detecteert zonder dat er een interactie met een foton optreedt (“Interaction free measurement”). De opstelling ziet er zo uit



Als het object er niet is moet er interferentie zijn. De Phase shift is zo ingesteld dat zonder object alleen detector D_2 klikt (maximale interferentie, zie de pijl in 8.3 hierboven). Als het object er wel is kunnen alleen de fotonen langs pad M BS_2 bereiken. De helft van die fotonen zullen dan naar D_1 gaan en de andere helft naar D_2 . Als detector D_2 klikt betekent dat dat een foton gedetecteerd wordt die pad M genomen heeft en dat er een obstakel in pad T is. We kunnen dus vaststellen dat er een object in pad T is zonder dat we een meting gedaan hebben aan het object. **Het foton dat binnenkomt langs het pad M vertelt ons dus dat er een obstakel is in het pad T .**

Enkel deeltje A in een superpositie toestand: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A + |V\rangle_A)$

Verstrengeld deeltjes paar A en B : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|H\rangle_B + |V\rangle_A|V\rangle_B)$

10. Appendix

10.1 Zijn imaginaire getallen echt nodig in de QM

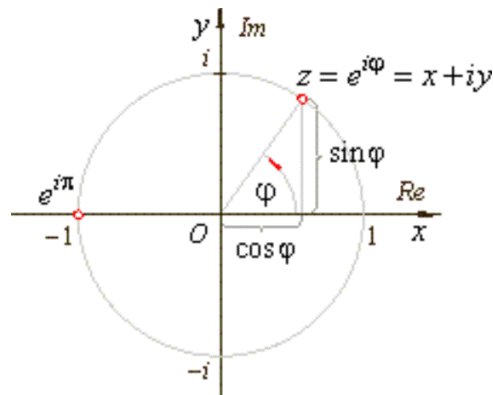
Imaginaire getallen zijn een goed hulpmiddel in de wiskunde. Ze worden veel toegepast bij bijv. berekeningen in de elektrodynamica. Ook in de golfmechanica helpen imaginaire getallen om de berekeningen eenvoudiger te maken. Een golf wordt dan geschreven als

$$\psi(x) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

Waarin A de amplitude is, k het golfgetal, en ω de hoeksnelheid. Met Euler's formule (zie hierna) kun je dit ook schrijven als een imaginair getal:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

Een imaginair getal zoals $e^{i\vartheta}$ of $z = a + bi$ bestaat uit 2 getallen. Het is dus eigenlijk een getallenpaar (a,b), een reëel getal (a) dat je kunt weergeven langs een as van reële getallen en een imaginair getal (bi) dat je kunt weergeven langs een as die daar loodrecht op staat (zie het voorbeeld hieronder).



Een vergelijking van 2 imaginaire getallen bestaat eigenlijk uit 2 vergelijkingen, een vergelijking voor het reële deel en een vergelijking voor het imaginaire deel.

Euler's formule: $z = re^{i\vartheta}$, met

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

Bewijs:

De afgeleide naar x van de functie e^{ax} is $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$. Neem nu de functie

$$f(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta + i \sin \vartheta}{e^{i\vartheta}}$$

De afgeleide van deze functie is gelijk 0. Dat houdt in dat $f(\vartheta) = \text{constant}$. We weten ook dat $f(0) = 1$. Dat houdt in dat $f(\vartheta) = 1$. Daarmee is de stelling bewezen.

N.B. de stelling houdt ook in dat $e^{i\pi} = -1$

Het gebruik van $e^{i\vartheta}$ maakt vermenigvuldiging en differentiëren van golven gemakkelijker en ook optellen van golven: $\psi_1(x) + \psi_2(x) = (A_1 + A_2)e^{i(kx - \omega t)}$ waardoor interferentie gemakkelijker beschreven kan worden.

Maar zijn ze ook noodzakelijk? Kan de quantummechanica ook beschreven worden zonder imaginaire getallen? Daarover heeft men veel gediscussieerd, en de discussie is nog niet geheel afgerond. Het ziet er naar uit dat we in de quantumwereld niet zonder imaginaire getallen kunnen. Zowel het reële deel als het imaginaire deel van de golf functie zijn van belang om de waarschijnlijkheid te berekenen. We kunnen de twee delen niet afzonderlijk meten, maar ze spelen wel allebei een belangrijke rol. Je kunt interferentie en de intensiteit van golven overigens wel zonder imaginaire getallen berekenen. Je kunt dus in het golfmodel het patroon van het Young experiment berekenen. Het lukt echter niet om het resultaat van het experiment met afzonderlijke fotonen op die manier te verklaren. Ook de beschrijving van verstrengelde toestanden lukt niet met alleen reële getallen.

Er is nog een belangrijke reden waarom de quantummechanica niet zonder imaginaire getallen kan.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi$$

De oplossing hiervan is

$$\Psi = e^{-i\omega t}, \quad \text{with } \omega = H/\hbar$$

De tijdsevolutie van een golffunctie wordt met een imaginaire fase beschreven. Dit is een lineaire vergelijking. Zonder die i geeft deze differentiaalvergelijking geen golven. Het imaginaire getal garandeert unitariteit, dat betekent behoud van waarschijnlijkheid (zie ook 5.9).

Er bestaat is een beroemd experiment gedaan -bedacht door Aharonov en Bohm - om aan te tonen dat ze nodig zijn. in dit experiment verandert een complexe fase het interferentiepatroon van deeltjes. De complexe fase heeft dus een fysisch effect.

Het ziet er dus naar uit dat imaginaire getallen niet slechts een handig wiskundig hulpmiddel is, maar dat de natuur op het niveau van elementaire deeltjes alleen beschreven kan worden met behulp van imaginaire getallen.

https://www.quantumuniverse.nl/hoe-complex-is-de-natuur-3?utm_source=perplexity Vonk zegt dat het slechts een wiskundig hulpmiddel is. Susskind denkt er anders over.

Beschrijving lopende golf, interferentie

$$y(x, t) = A(x, t) \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \lambda f, \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

In de klassieke mechanica (en Elektronica) is het imaginaire deel een wiskundig hulpmiddel dat de berekeningen eenvoudiger maakt. Het imaginaire deel heeft geen fysische betekenis. In de quantummechanica maakt het de berekeningen ook eenvoudiger, maar is het imaginaire deel wel relevant, hoewel het niet direct meetbaar is.

Voordelen:

Differentiatie gaat gemakkelijker.

Intensiteit: $I \propto |\psi|^2 = \psi^* \psi = \text{Re}|\psi|^2 + \text{Im}|\psi|^2$

Interferentie is gemakkelijker te beschrijven. $\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = A_1 e^{i(kx - \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} = (A_1 + A_2) e^{i(kx - \omega t)}$

Verwerken van faseverschillen (dubbel-spleet experiment):

$$\psi = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + A e^{i(kx - \omega t + \phi)} = A e^{i(kx - \omega t)} (1 + e^{i\phi})$$

Uitwerken Intensiteit $I \propto |\psi_1 + \psi_2|^2 = A^2 4 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$. Zonder imaginaire getallen kunnen we de golf beschrijven als $\psi = A \cos(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \phi)$. De intensiteit is dan het tijdsgemiddelde van ψ , ofwel $I = \langle \psi \rangle_t$. Dat levert hetzelfde resultaat als hierboven.

Het Young experiment kan volledig met de klassieke golftheorie beschreven worden. Dat lukt echter niet als je fotonen één voor één door de spleten laat gaan. Quantum mechanisch geldt voor elektronen met golf functie (voor twee spleten)

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2\text{Re}[\psi_1^*(x)\psi_2(x)]$$

De laatste term in het rechter lid geeft het interferentiepatroon.

Het imaginaire getal in de Schrödinger vergelijking levert het golfkarakter en zorgt voor “unitariteit”, dwz. dat de waarschijnlijkheid $|\psi|^2$ behouden blijft. De Schrödinger vergelijking is tijd-reversibel. Zonder i is hij dat niet. Je kunt ook meervoudige qubits zoals verstrengelde toestanden beschrijven. Tenslotte toont het Aharonov-Bohm experiment aan dat een complexe fase een fysiek effect kan hebben.

De quantummechanica laat meer (meervoudige) toestanden toe dan de klassieke theorie, bijv. toestanden met complexe fase, bijv. $|01\rangle + |01\rangle$ en $|01\rangle + i|01\rangle$. Deze leveren andere meetbare toestanden op.

We kunnen de waarnemingen met het SG apparaat beschrijven met de Pauli spinoperatoren. Eén van de operatoren moet een imaginair deel bevatten om de waarnemingen in overeenstemming met de theorie te brengen.

10.2 Schrodinger's kat

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{kern niet vervallen}\rangle \otimes |\text{kat levend}\rangle + |\text{kern wel vervallen}\rangle \otimes |\text{kat dood}\rangle)$$

De kat (en het atoom) zijn in een superpositietoestanden die met elkaar verstrengeld zijn. Door interactie met de omgeving stort de verstrengeling in (decoherentie) tot een klassiek mengsel.

Voor decoherentie:

$$\begin{aligned} \rho = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |nv\rangle & |l\rangle \\ |v\rangle & |d\rangle \end{pmatrix} (\langle nv| \langle l|, \langle v| \langle d|) \\ &= \frac{1}{2} (|nv, l\rangle \langle nv, l| + |nv, l\rangle \langle v, d| + |v, d\rangle \langle nv, l| + |v, d\rangle \langle v, d|) \end{aligned}$$

Deze dichtheidsmatrix bevat niet-diagonaal elementen die de coherentie tussen leven en dood geven. Door interactie met de omgeving vervallen deze termen en blijven er alleen diagonaal elementen over en krijgen we een klassiek mengsel

$$\begin{aligned} \rho_{\text{klassiek}} &= \frac{1}{2} (|\text{kern niet vervallen}\rangle \langle \text{kern niet vervallen}| \otimes |\text{kat levend}\rangle \langle \text{kat levend}| \\ &\quad + |\text{kern wel vervallen}\rangle \langle \text{kern wel vervallen}| \otimes |\text{kat dood}\rangle \langle \text{kat dood}|) \end{aligned}$$

Door interactie (decoherentie) is de gezamenlijke toestand nu

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|nv\rangle |\text{levend}\rangle + |v\rangle |\text{dood}\rangle)$$

Dit is geen product toestand, maar een verstrengelde toestand.

$$\rho_{kat} = Tr(\rho_{totaal}) = \frac{1}{2}(|levend\rangle|levend\rangle + |dood\rangle|dood\rangle)$$

- Copenhagen interpretatie
- Veel werelden interpretatie
- Decoherentie van superpositie toestanden

10.3 Toepassingen quantumcomputer

Sensoren

Quantumcomputer (grootste in 2025: IBM Condor, supergeleidende quantumprocessor, 1121 qubits, en Caltech, "Neutral-Atom", 6100 qubits)

Voordelen: Fundamenteel andere manier van rekenen (qubits: ionen, fotonen..).

Voorbeelden: Handelsreiziger probleem (schaalt met N ipv N!)

Algorithms voor berekenen eiwit, priemgetallen, versleuteling. Detectie van af luisteren

Problemen: stabiliteit, foutencorrectie.

Networking (internet), versleuteling.

10.4 Tensor product of Kronecker product (Susskind 7.1).

Wanneer we kets en operatoren in matrixvorm schrijven kunnen we het tensorproduct van kets en operatoren op eenvoudige manier definiëren. We nemen als voorbeeld de spins van 2 fermionen van A en B. De basiskets van A's fermion zijn $|u\rangle_A$ en $|d\rangle_A$ en $|u\rangle_B$ en $|d\rangle_B$ voor B. Het tensorproduct van de twee fermionen bevat 4 ket combinaties: $|uu\rangle$, $|ud\rangle$, $|du\rangle$ en $|dd\rangle$, waarbij we de subindex hebben weggelaten met de afspraak dat het eerste symbool steeds de ket van A is en het tweede de ket van B. $|uu\rangle$ is dus $|u\rangle_A \otimes |u\rangle_B$. Het tensorproduct kan in matrixvorm worden gedefinieerd, bijv.

$$|uu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |ud\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|du\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |dd\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De regel is dat ieder matrixelement van A wordt vermenigvuldigd met de matrix B, dus in het geval van twee 2x2 matrices:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Dit voorbeeld laat goed zien hoe de twee matrices met elkaar vermenigvuldigd worden. Dit werkt voor matrices van willekeurige grootte. Het product van een m x n matrix en een p x q matrix is een mp x nq matrix.

Je kunt op deze manier ook 2 operatoren met elkaar vermenigvuldigen, bijv. spin operatoren zoals σ_z werkend op A's kets en σ_x werkend op die van B. Om de operatoren goed uit elkaar te houden noemen we σ_x werkend op B τ_x . Het product wordt dan

$$\sigma_z \otimes \tau_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wanneer je deze operator nu laat werken op een de toestand $|ud\rangle$ dan vind je

$$(\sigma_z \otimes \tau_x)|ud\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |uu\rangle$$

Dis precies wat we verwachten wanneer $\sigma_z|ud\rangle = |ud\rangle$ en $\tau_x|dd\rangle = |du\rangle$, omdat $\sigma_z|u\rangle = |u\rangle$ en $\tau_x|d\rangle = |u\rangle$.

Je kunt een operator zoals $\sigma_z \otimes \tau_x$ of $\sigma_z \otimes I$ ook schrijven in een matrixvorm ten opzichte van een bepaalde basis. waarvan de componenten bestaan uit de inproducten

Literatuur:

- 1) L. Susskind, „Quantum Mechanics, The theoretical minimum”
- 2) J.J. Sakurai, “Modern Quantum Mechanics“
- 3) “The quantum Divide”, by C.C. Gerry and K.M. Bruno.
- 4) A. Seilinger, “Dance of the photons”
- 5) [Quantum Physics](#)
- 6) [Quantum Theory](#) Beenakker
- 7)

Links:

Voor de interpretatie van de QM: zie de video van het interview dat Brian Greene had met Alain Aspect: [Have We Been Brainwashed? Quantum Mechanics and Nonlocality](#). Dit interview werd op 14 november 2025 op Youtube gezet. Het sluit mooi aan bij de workshop.

[2106.10522](#) Quantum computing, Preskill

[Natuurwetenschappelijk Gezelschap Leiden \(NGL\) lezing](#) Klaar voor Quantum

<https://jackkrupansky.medium.com/feynmans-three-papers-related-to-quantum-computing-dd6f9847e6ad>

<https://s2.smu.edu/~mitch/class/5395/papers/feynman-quantum-1981.pdf>

[Nobelprijs natuurkunde voor aantonen non-lokaliteit quantumverstrengeling - Quantum Physics & Consciousness](#)

[The Myth of the ‘Observer Effect’ in Quantum Physics](#)
[Teleportatie met verstrengelde deeltjes - Artikelen - De Ingenieur](#)
[Quantumverstrengeling: de EPR-paradox en de stelling van Bell | OpenCurve](#)
[Light for the quantum. Entangled photons and their applications: a very personal perspective - IOPscience](#) by Zeilinger
[Bell's Inequalities | Galileo Unbound](#)
[A Short History of Quantum Entanglement | Galileo Unbound](#)
<https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0402001> Aspect

Light goes backward in time?

[The 9 Experiments That Will Change Your View of Light \(And Blow Your Mind\) - YouTube](#)
<https://arxiv.org/abs/2210.17046>
<https://arxiv.org/abs/2211.01283>
<https://www.livescience.com/quantum-time-flipped-photon-first-time>
<https://www.theguardian.com/science/2000/jul/20/technology2>
<https://www.iflscience.com/experiments-deliver-superposition-of-photon-going-forward-and-backward-in-time-66181>

http://pages.uoregon.edu/svanenk/solutions/Mixed_states.pdf
http://en.m.wikipedia.org/wiki/Quantum_state
http://en.m.wikipedia.org/wiki/Quantum_entanglement#As_a_measure_of_entanglement
http://en.m.wikipedia.org/wiki/Entropy_of_entanglement
http://en.m.wikipedia.org/wiki/Quantum_relative_entropy#An_entanglement_measure

Susskind's video lectures on physics: <https://glenmartin.wordpress.com/home/leonard-susskinds-online-lectures/#minimum>

Mixed states:

[Mixed_states.pdf](#)

Von Neumann entropie

[Anastasiya Khromova, Dr. rer. nat. UA – Medium](#)

[The von Neumann Entropy. The Shannon entropy measures the... | by Anastasiya Khromova, Dr. rer. nat. UA | Medium](#)

Information paradox of BHs: [What Happens to the Information that Falls into the Black Holes? | by Anastasiya Khromova, Dr. rer. nat. UA | The Quantastic Journal | Medium](#)

[zwakintbos_dispersie.ps](#) QM van veel deeltjes systemen